4170109 Matematik

7. Hafta — İkinci Dereceden Fonksiyonlar ve Parabol

6 Kasım 2026

https://eozyerden.github.io/4170109-matematik/

14 Haftalık Program

1. Sayılar, işlem kuralları, üslü sayılar, mutlak değer
2. Denklem ve eşitsizlikler
3. Fonksiyon kavramı, doğrusal fonksiyonlar
4. Eğim ve değişim oranı
5. Arz, talep, piyasa dengesi
6. Maliyet, gelir, kâr, başa baş
7. **İkinci dereceden fonksiyonlar, parabol**
8. Tepe noktası, gelir maksimizasyonu
9. Ters fonksiyon, üstel fonksiyonlar
10. Logaritma, bileşik faiz, bugünkü değer
11. Ortalama değişimden anlık değişime: limit, süreklilik
12. Türev ve türev alma kuralları
13. Marjinal maliyet ve marjinal gelir
14. Ekstremum, türevle optimizasyon

Bugünün Planı

1. saat: parabol

- Geçen hafta tekrarı
- İkinci dereceden fonksiyon, parabol
- Tepe noktası, eksen kesişimleri
- Parabol çizimi
- Tersten soru

2. saat: gelir ve parabol

- Kolların açıklığı, değer tablosu
- Gelir fonksiyonu ve en yüksek gelir
- Parabol ile doğrunun kesişimi
- Gelir ve maliyet: iki başa baş

Geçen Hafta Tekrarı

- Geçen hafta işletme her birimi aynı fiyattan sattı: p sabitti
- Gelir $R = p \cdot q$ ve maliyet $TC = c \cdot q + FC$ birer doğruydu
- Başa baş noktasında gelir ve maliyet fonksiyonları eşitlenir: $R = TC$
- 5. haftada ise fiyat miktara bağlıydı: $p = f(q)$
- Bugünün sorusu: gelir her zaman bir doğru mu?

Fiyat Miktara Bağlıysa

- Geçen hafta fiyat satış miktarına bağlı değildi. Bu hafta satış arttıkça fiyat düşüyor.
- 5. haftanın talep fonksiyonu: $p = -4q + 120$ (q: ton, p: ton fiyatı, bin TL). İki gözlemden kurulmuştu.
- Gelir:
$$R = p \cdot q = (-4q + 120) \cdot q = -4q^2 + 120q$$
- q^2 terimi geldi: gelir artık doğrusal değil, **ikinci dereceden**

İkinci Dereceden Fonksiyon

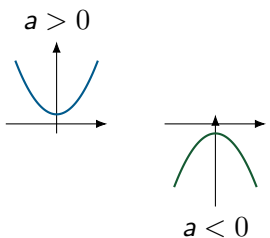
(s.100)

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$; a, b, c reel sayı) biçimindeki fonksiyonlara **ikinci dereceden fonksiyon** (kuadratik fonksiyon) denir
- $a = 0$ olursa fonksiyon doğrusal olur
- Örnek: $f(x) = 3x^2 - 5x + 15$; $a = 3$, $b = -5$, $c = 15$
- 5. slayttaki gelir de ikinci dereceden: $R = -4q^2 + 120q$; $a = -4$, $b = 120$, $c = 0$

Parabol

(s.100)

- İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiğine **parabol** denir
- $a > 0$ ise kollar **yukarı**, $a < 0$ ise kollar **aşağı** doğrudur
- Kolları yukarı olan parabolün bir **minimum** noktası, aşağı olanın bir **maksimum** noktası vardır
- **Simetri ekseni**: tepe noktasından geçen düşey doğru, $x = -b/(2a)$. Parabol bir noktaya göre değil, bu doğruya göre simetriktir.



Tepe Noktası

(s.101)

- **Tepe noktası**, parabolün minimum ya da maksimum noktasıdır

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun tepe noktası:

$$x = -\frac{b}{2a} \qquad y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

- Önce x değeri (apsis) bulunur: $x = -b/(2a)$
- y değeri (ordinat) için bu x değeri fonksiyonda yerine yazılır

Tepe Noktası — Örnek

$f(x) = -2x^2 + 8x - 6$ fonksiyonunun tepe noktasını bulunuz.

Parabolün Eksenleri Kestiği Noktalar — y Ekseni

(s.101-102)

- Bir fonksiyonun y eksenini kestiği noktada $x = 0$'dır
- $f(x) = ax^2 + bx + c$'de $x = 0$ yerine yazılır:

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

- Parabol y eksenini **her zaman** $(0, c)$ noktasında keser
- $c = 0$ ise parabol $(0, 0)$ noktasından geçer. 5. slayttaki gelirde $c = 0$: satış yoksa gelir de yok.

Parabolün Eksenleri Kestiği Noktalar — x Ekseni

(s.101-102)

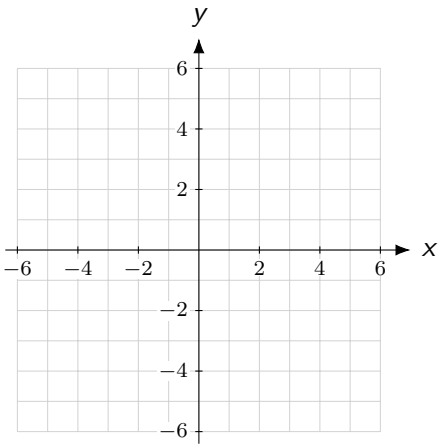
- x eksenini kestiği noktalarda fonksiyonun değeri sıfırdır: $ax^2 + bx + c = 0$
- 2. haftada gördük: **diskriminant** (Δ) ve kök formülü:

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta > 0$: parabol x eksenini **iki farklı noktada** keser
- $\Delta = 0$: parabol x eksenine **tek noktada** değer (**teğettir**)
- $\Delta < 0$: parabol x eksenini **kesmez**

Örnek — Tepe Noktası, Eksenler ve Grafik

Çizim: kolların yönü, tepe noktası, y ekseni ve x ekseni kesişimleri. (s.104-105)
$f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun tepe noktasını ve eksen kesişimlerini bulup parabolü çiziniz. (s.103)



Tepe Noktası Köklerin Ortasında

Kök formülü iki parçaya ayrılabilir:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- İki kök, $-b/(2a)$'nın iki yanında ve ona eşit uzaklıktadır
- Kökler varsa tepe noktasının x değeri tam ortalarındadır: $x = (x_1 + x_2)/2$
- Örnek: $f(x) = x^2 - 6x + 5$'te $\Delta = 16$; $-b/(2a) = 3$, $\sqrt{\Delta}/(2a) = 4/2 = 2$
- Kökler 3 ± 2, yani 1 ve 5. Ortaları $(1 + 5)/2 = 3$.

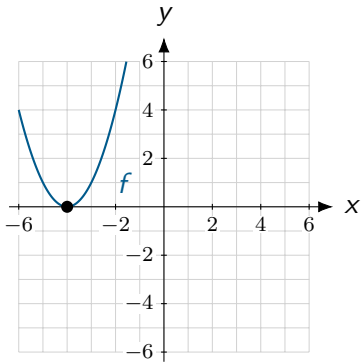
Örnek — $\Delta = 0$

$f(x) = x^2 + 8x + 16$ fonksiyonunun Δ'sını ve tepe noktasını bulunuz. Parabol x ekseniyle nasıl bir ilişki içindedir? (s.113)

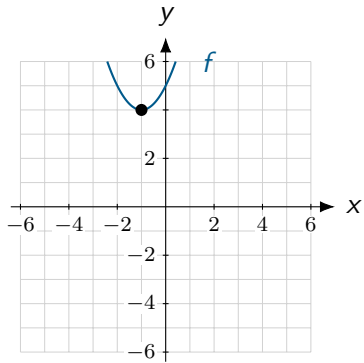
Alıştırma — $\Delta < 0$

$f(x) = x^2 + 2x + 5$ fonksiyonunun Δ'sını ve tepe noktasını bulunuz. Parabol x ekseniyle nasıl bir ilişki içindedir?

$\Delta = 0$ ve $\Delta < 0$ — Grafik



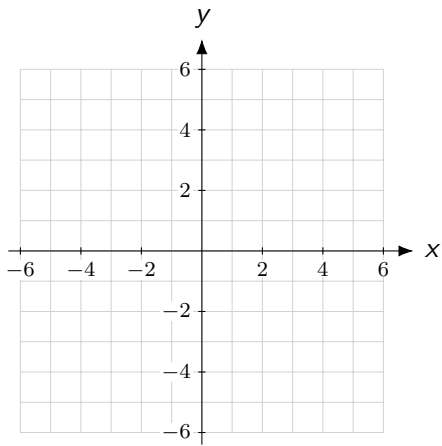
14. slayt: $f(x) = x^2 + 8x + 16$, $\Delta = 0$: x eksenine $(-4, 0)$'da teğet



15. slayt: $f(x) = x^2 + 2x + 5$, $\Delta < 0$: tepe noktası $(-1, 4)$, x eksenini kesmez

Alıştırma — Tepe Noktası, Eksenler ve Grafik

$f(x) = -x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun tepe noktasını ve eksen kesişimlerini bulup parabolü çiziniz.



Tersten — Tepe Noktasından Katsayı

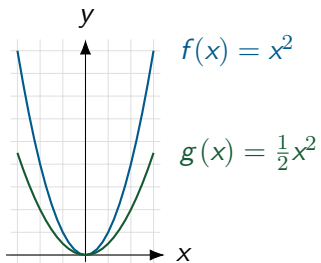
$f(x) = 2x^2 + bx + 1$ parabolünün tepe noktasının x değeri 1'dir. b kaçtır? Tepe noktasını bulunuz.

Ara

Parabol Kollarının Açıklığı

(s.103-104)

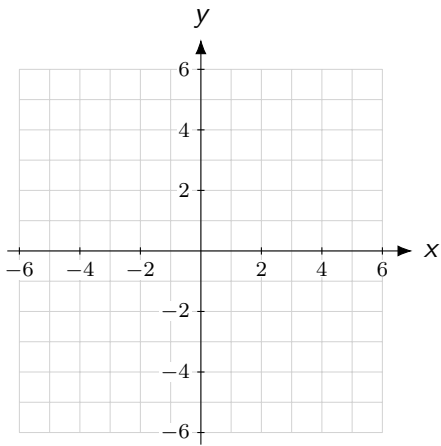
- a'nın işareti kolların yönünü, $|a|$ açıklığını belirler
- $|a|$ büyüdükçe kollar **daralır**, küçüldükçe **açılır**
- Aynı x için $|a|$ büyük olanın değeri daha hızlı büyür: $f(2) = 4,\ \ g(2) = 2$



Değer Tablosuyla Çizim — Örnek

$f(x) = -x^2 + 4x$ için tabloyu doldurunuz.
Tepe noktasını ve eksen kesişimlerini işaretleyip parabolü çiziniz.

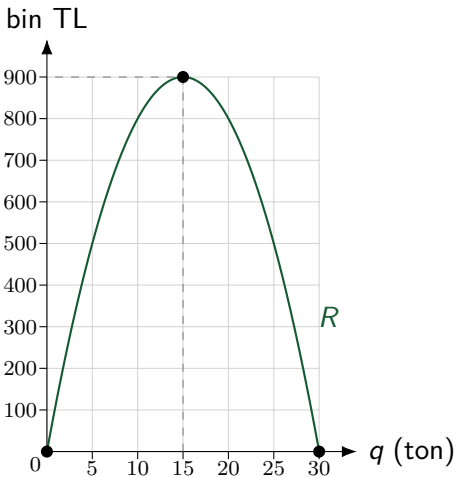
x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	



Gelir Fonksiyonu — Örnek

5. slayttaki gelir: $R = -4q^2 + 120q$ (q: ton, R: bin TL).
a) Δ'yı bulunuz. R, q eksenini kesiyor mu, nerede? Bu noktalar ne anlatır?
b) Geliri en yüksek yapan satış miktarını, en yüksek geliri ve bu miktardaki fiyatı bulunuz.

Gelir Fonksiyonu — Grafik ve Yorum



- Tepe noktası $(15,\ 900)$: en yüksek gelir 15 tonda, 900 bin TL
- $q < 15$: satış artınca gelir artar
- $q > 15$: fiyat çok düştüğü için gelir azalır
- $a = -4 < 0$: kollar aşağı, gelirin bir en yüksek değeri var. Nedeni: satış arttıkça fiyat düşüyor.
- Tepe noktasının iki yanında aynı uzaklıktaki miktarlar aynı geliri verir: $R(10) = R(20) = 800$ bin TL (10 ton 80 bin TL'den, 20 ton 40 bin TL'den).

Alıştırma — Geliri En Yüksek Yapan Miktar

Bir ürünün talep fonksiyonu $p = -5q + 110$ (q: adet, p: TL). Geliri en yüksek yapan satış miktarını, en yüksek geliri ve bu miktardaki fiyatı bulunuz. (M-1 s.174)

Alıştırma — Tersten: Gelirden Talep

Bir ürünün talep fonksiyonu $p = -2q + k$ (q: adet, p: TL). Gelir 25 adette en yüksektir. k'yi, en yüksek geliri ve bu miktardaki fiyatı bulunuz.

Parabol ile Doğrunun Kesişimi

(s.106)

- Parabol $f(x) = ax^2 + bx + c$, doğru $g(x) = mx + n$
- İki fonksiyon eşitlenir: $f(x) = g(x)$. Terimler tek tarafa toplanır:
  $ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$
- Bu denklemin kökleri, kesişim noktalarının x değerleridir. y değeri için kök, doğrunun fonksiyonunda yerine yazılır.
- Yeni denklemin Δ'sına bakılır (parabolün kendi Δ'sına değil):
  - $\Delta > 0$: iki noktada kesişirler
  - $\Delta = 0$: doğru parabole teğettir (tek ortak nokta)
  - $\Delta < 0$: kesişmezler
- 5. ve 6. haftada iki doğru da böyle eşitlendi

Parabol ile Doğru — Örnek

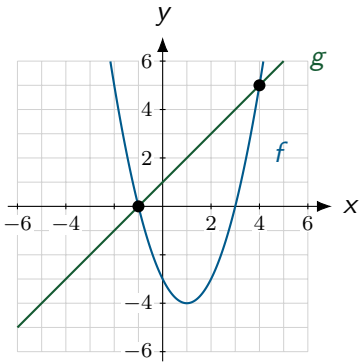
12. slayttaki $f(x) = x^2 - 2x - 3$ parabolü ile $g(x) = x + 1$ doğrusunun kesişim noktalarını bulunuz.

Alıştırma — Parabol ile Doğru

$f(x) = x^2 - 4$ parabolünün aşağıdaki doğrularla kesişim noktalarını bulunuz.

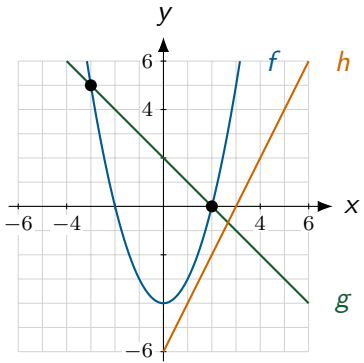
a) $g(x) = -x + 2$ b) $h(x) = 2x - 6$

Parabol ile Doğru — Grafik



27. slayt:

$f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = x + 1$:
iki noktada kesişir, $(-1, 0)$ ve $(4, 5)$



28. slayt:

$f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = -x + 2$, $h(x) = 2x - 6$:
f ile g: $(-3, 5)$ ve $(2, 0)$; f ile h kesişmez

Gelir ve Maliyet — İki Başa Baş Noktası

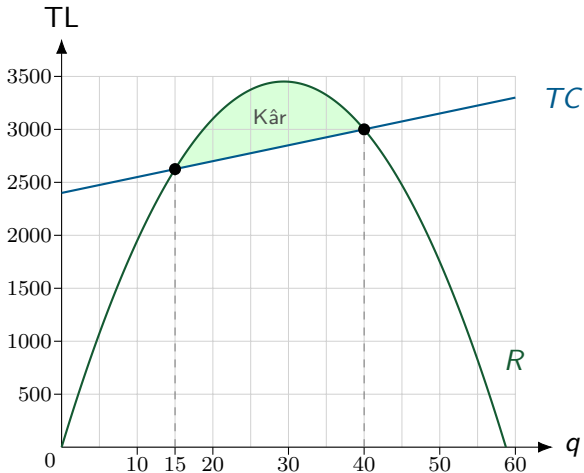
Bir ürünün birim maliyeti 15 TL, sabit maliyeti 2400 TL. Talep fonksiyonu $p = -4q + 235$ (q: birim, p: TL). Gelir ve maliyet fonksiyonlarını yazınız. Başa baş noktalarını bulunuz. (M-1 s.168)

Gelir ve Maliyet — Kâr Aralığı

30. slayttaki ürün: $R = -4q^2 + 235q$, $TC = 15q + 2400$. Kâr fonksiyonunu yazınız. Kaç birim satılırsa kâr edilir? (M-1 s.168)

q							
π							

Gelir ve Maliyet — Grafik ve Yorum



- İki başa baş noktası: $(15,\ 2625)$ ve $(40,\ 3000)$
- $15 < q < 40$: R eğrisi TC doğrusunun üstünde, kâr
- 15'ten az satışta gelir maliyetin altında: zarar
- 40'tan çok satışta fiyat çok düşer; gelir maliyetin altına iner
- Geçen hafta gelir bir doğruydu: tek başa baş noktası vardı

Bu Haftanın Yöntemleri — Özet

- **İkinci dereceden fonksiyon:** $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, grafiği parabol. a'nın işareti kolların yönünü, $|a|$ açıklığını belirler.
- **Tepe noktası:** $x = -b/(2a)$, $y = f(-b/(2a))$; kökler varsa tam ortalarında
- **Eksen kesişimleri:** y ekseni $(0, c)$; x ekseni için $\Delta = b^2 - 4ac$
- **Gelir:** talep miktara bağlıysa gelir bir parabol, kolları aşağı. Tepe noktası geliri en yüksek yapan satış miktarını ve en yüksek geliri verir.
- **Parabol ile doğru:** iki fonksiyon eşitlenir, $f(x) = g(x)$; yeni denklemin Δ'sına bakılır
- **Gelir ve maliyet:** gelir ve maliyet fonksiyonları eşitlenir, $R = TC$; iki başa baş noktası olabilir, kâr aralarındadır

Gelecek Hafta

- Bugün: ikinci dereceden fonksiyonlar, parabol ve en yüksek gelir
- Gelecek hafta: gelir maksimizasyonu. Talep fonksiyonu verilmez, iki fiyat-miktar bilgisinden kurulur.