6. Hafta — Maliyet, Gelir, Kâr ve Başa Baş Analizi

4170109 Matematik

1 Sabit ve Değişken Maliyet

Temel Matematik, s.34

Bir işletmenin maliyetinin bir kısmı üretimle değişmez, bir kısmı üretimle birlikte değişir:

- Üretim miktarı değişse de değişmeyen maliyete **sabit maliyet** (fixed cost) denir. Kira ve sigorta buna örnektir.
- Üretim miktarıyla birlikte değişen maliyete **değişken maliyet** (variable cost) denir. Hammadde ve ambalaj buna örnektir.
- Bir birimin maliyetine **birim maliyet** denir.

Bu üç kavramdan iki toplam elde edilir:

- **Toplam değişken maliyet**, birim maliyet ile üretim miktarının çarpımıdır.
- **Toplam maliyet** (total cost), sabit maliyet ile toplam değişken maliyetin toplamıdır.

2 Maliyet Fonksiyonu

Temel Matematik, s.34-35

Bu hafta kitaptaki harfler kullanılır:

- FC: sabit maliyet
- c: birim maliyet
- q: üretim miktarı

Bu harflerle:

- Toplam değişken maliyet: $VC = c \cdot q$
- Toplam maliyet: $TC = VC + FC$, yani $TC = c \cdot q + FC$
- TC doğrusunun eğimi c'dir: bir birim fazla üretmek maliyeti c kadar artırır.
- TC doğrusu düşey ekseni FC'de keser: hiç üretim yokken de sabit maliyet ödenir.

3 Gelir Fonksiyonu

Temel Matematik, s.34

Geçen hafta fiyat miktara bağlıydı: $p = f(q)$. Bu hafta tek bir işletmeye bakıyoruz. Bu hafta işletme her birimi aynı fiyattan satar: p sabit bir sayıdır.

- p: birim satış fiyatı, q: satış miktarı
- **Toplam gelir** (total revenue), birim satış fiyatı ile satış miktarının çarpımıdır: $R = p \cdot q$
- R doğrusu $(0, 0)$ noktasından geçer; eğimi p'dir.

İktisat derslerinde toplam gelire toplam hasılat da denir.

4 Kâr Fonksiyonu

Temel Matematik, s.35

- **Kâr**, toplam gelirden toplam maliyet çıkarılarak bulunur: $\pi(q) = R(q) - TC(q)$
- Açık yazılırsa: $\pi = p \cdot q - (c \cdot q + FC) = (p - c) \cdot q - FC$
- $(p - c)$ farkı **birim kâr**dır: bir birim fazla satılınca kâr bu kadar artar.

Buradaki π bir sayı değil, kârın adıdır (İngilizce profit). Kitapta kâr P ile gösterilir; bu derste π kullanılır.

Örnek: Bir işletmenin aylık sabit maliyeti 3000 TL, birim maliyeti 100 TL, birim satış fiyatı 160 TL. TC, R ve π fonksiyonlarını yazınız. İşletme ayda 30 birim üretip satarsa kâr mı eder, zarar mı?

- $TC = 100q + 3000, \;\; R = 160q$
- $\pi = 160q - (100q + 3000) = 60q - 3000$
- $\pi(30) = 60 \cdot 30 - 3000 = 1800 - 3000 = -1200$
- Kâr negatif: işletme 1200 TL zarar eder.
- Kontrol: $TC(30) = 6000, \;\; R(30) = 4800$; gelir maliyetten 1200 TL az.

5 Değer Tablosu

Örnek: Önceki örnekteki işletme ($FC = 3000$ TL, $c = 100$ TL, $p = 160$ TL). Tabloyu doldurunuz; son sütunda miktarı bulunuz. Hangi sütunda $R = TC$?

q	10	20	30	40	50	60
TC	4000	5000	6000	7000	8000	9000
R	1600	3200	4800	6400	8000	9600
π	-2400	-1800	-1200	-600	0	600

- Örneğin $q = 10$: $TC = 100 \cdot 10 + 3000 = 4000$, $R = 160 \cdot 10 = 1600$, $\pi = -2400$
- Son sütun: $100q + 3000 = 9000 \Rightarrow 100q = 6000 \Rightarrow q = 60$
- $q = 50$'de $R = TC = 8000$, $\pi = 0$

Tabloda q her 10 birim artınca kâr 600 TL artar. Bir birimde artış 60 TL'dir: bu, birim kârdır.

6 Başa Baş Noktası

Temel Matematik, s.34-35

Geçen hafta piyasa dengesinde arz ve talep fonksiyonları eşitlendi; kesişim noktası denge miktarını ve denge fiyatını verdi. Bu hafta da iki doğru eşitlenir: gelir ve maliyet.

- Gelirin maliyete eşit olduğu, yani kârın sıfır olduğu noktaya **başa baş noktası** (break-even) denir.
- Gelir ve maliyet fonksiyonları eşitlenir: $R = TC$. Ya da kâr sıfıra eşitlenir: $\pi = 0$. İkisi aynı denklemi verir.
- Bulunan miktar **başa baş miktarı**dır (kitapta: "başabaş noktası satış miktarı").
- Bu miktardaki gelir **başa baş geliri**dir.

Not: başa baş konusu kitabınızda Bölüm 2'dedir (s.34-36); Bölüm 4'ün başında adı geçse de orada işlenmez.

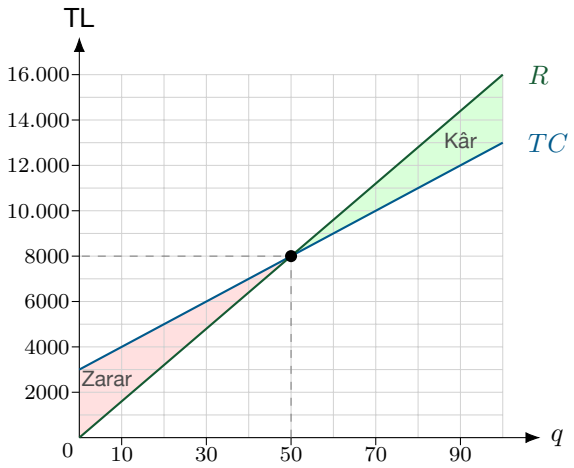
Örnek: Kâr fonksiyonu örneğindeki işletme ($FC = 3000$ TL, $c = 100$ TL, $p = 160$ TL). Başa baş miktarını ve başa baş gelirini bulunuz.

- Gelir ve maliyet fonksiyonları eşitlenir: $R = TC$, yani $160q = 100q + 3000$
- $60q = 3000 \Rightarrow q = 50$
- Başa baş geliri: $R(50) = 160 \cdot 50 = 8000$ TL
- Kontrol: $TC(50) = 100 \cdot 50 + 3000 = 8000$; $\pi(50) = 0$
- Başa baş noktası $(50,\ 8000)$

Değer tablosunda da $q = 50$'de $R = TC$ çıkmıştı.

Aşağıdaki grafikte bu işletmenin TC ve R doğruları görülüyor. (s.35)

- Kesişim $(50,\ 8000)$: başa baş noktası
- Başa baş miktarından az satışta ($q < 50$) R doğrusu TC doğrusunun altındadır: zarar.
- Başa baş miktarından çok satışta ($q > 50$) R doğrusu TC doğrusunun üstündedir: kâr.
- TC doğrusu düşey ekseni 3000'de keser: sabit maliyet



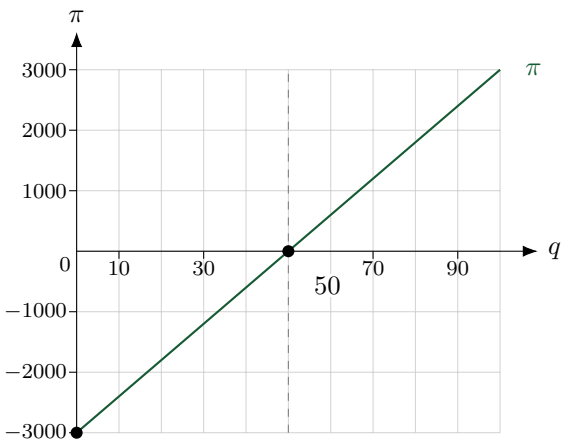
Not: Yeşil alan kârın kendisi değildir; kâr edilen miktarları gösterir. Belli bir miktardaki kâr, o miktarda R ile TC doğruları arasındaki dikey uzaklıktır: $q = 80$'de $12.800 - 11.000 = 1800$ TL. Zarar da öyledir: $q = 30$'da TC ile R arasındaki dikey uzaklık $6000 - 4800 = 1200$ TL'dir.

Not: kitabınızdaki Şekil 2.2'de (s.35) başa baş noktasının yüksekliği p_0 diye yazılmış; bu bir fiyat değil, başa baş geliridir.

7 Kâr Doğrusu ve Eksen Kesişimleri

Aynı işletmenin kâr fonksiyonu $\pi = 60q - 3000$'dir. Bu da bir doğrudur.

- $q = 0$'da $\pi = -3000$: satış yoksa sabit maliyet kadar zarar edilir.
- $\pi = 0$'da $q = 50$: doğru yatay ekseni başa baş miktarında keser.
- Eğim 60, birim kârdır: her birim kârı 60 TL artırır.
- R ile TC arasındaki dikey uzaklık π'dir: $q = 80$'de $12.800 - 11.000 = 1800 = \pi(80)$

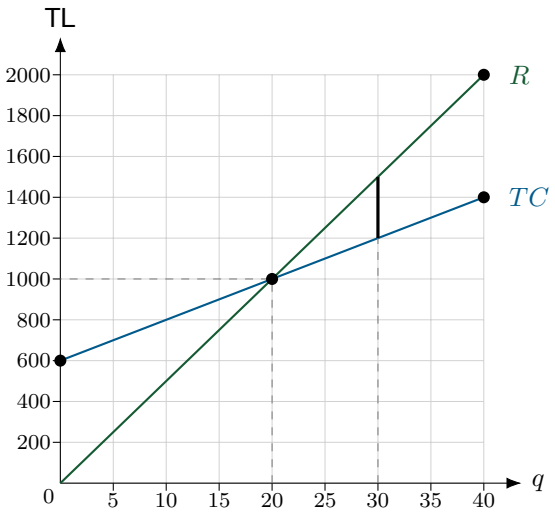


Örnek (Çalışma Sorusu 4): Grafikte bir ürünün toplam maliyet (TC) ve toplam gelir (R) doğruları var (q: birim, düşey eksen: TL).

a) İki doğrunun denklemini yazınız.

b) Başa baş noktasını grafikten okuyunuz. a şıkkındaki denklemlerle kontrol ediniz.

c) $q = 30$'da R ile TC arasındaki dikey uzaklık kaç TL'dir? Bu uzaklık neyi gösterir?



- a) TC doğrusu $(0,\ 600)$ ve $(40,\ 1400)$ noktalarından geçer: eğim $(1400-600)/(40-0) = 800/40 = 20$; düşey ekseni 600'de keser: $TC = 20q + 600$. R doğrusu $(0,\ 0)$ ve $(40,\ 2000)$ noktalarından geçer: eğim $2000/40 = 50$: $R = 50q$.
- b) Doğrular $(20,\ 1000)$ noktasında kesişir. Kontrol: gelir ve maliyet fonksiyonları eşitlenir: $R = TC$, yani $50q = 20q + 600$; $30q = 600$, $q = 20$; $R(20) = 50 \cdot 20 = 1000$, $TC(20) = 400 + 600 = 1000$. Başa baş miktarı 20, başa baş geliri 1000 TL.
- c) $q = 30$'da $R = 1500$, $TC = 1200$; dikey uzaklık $1500 - 1200 = 300$ TL. R doğrusu üstte: bu uzaklık 30 birimdeki kârdır. Kontrol: $\pi = 50q - (20q + 600) = 30q - 600$, $\pi(30) = 900 - 600 = 300$.

8 Kâr İçin En Az Kaç Birim?

Kâr etmek, kârın sıfırdan büyük olması demektir ($\pi > 0$). Bu, 2. haftadaki birinci dereceden eşitsizliktir. Miktar sayılabilir bir birimse (birim, adet) sonuç aralıkla değil, tam sayıyla ve sözle yazılır.

Örnek: Yeni bir işletmenin sabit maliyeti 2000 TL, birim maliyeti 50 TL, birim satış fiyatı 80 TL. Kâr etmek için en az kaç birim satmalıdır?

- $\pi = 80q - (50q + 2000) = 30q - 2000$
- Kâr etmek: $\pi > 0$, yani $30q - 2000 > 0$
- $30q > 2000 \Rightarrow q > 2000/30 \approx 66{,}67$
- $q > 66{,}67$, yani en az 67 birim
- Kontrol: $\pi(66) = 1980 - 2000 = -20$, 20 TL zarar; $\pi(67) = 2010 - 2000 = 10$, 10 TL kâr

Sonuç aşağı yuvarlanmaz: 66 birimde işletme hâlâ zarar eder.

9 Kâr Hedefi

Temel Matematik, s.36

- Başa baş noktasında kâr sıfırdır.
- İşletme belli bir kâr hedefliyorsa kâr fonksiyonu bu hedefe eşitlenir: $\pi =$ hedef
- Aynı şey: gelir, maliyetten hedef kadar fazladır: $R = TC +$ hedef
- Başa baş, hedefin sıfır olduğu durumdur.

Örnek: Bir firma birim maliyeti 5 TL olan bir ürün üretiyor. Aylık sabit giderleri 2000 TL. Ürünü 8 TL'ye satıyor. Ayda 7000 TL kâr etmek için kaç ürün üretip satmalıdır? (s.36)

- $\pi = 8q - (5q + 2000) = 3q - 2000$
- Kâr hedefi: $3q - 2000 = 7000$
- $3q = 9000 \Rightarrow q = 3000$ ürün
- Kontrol: $R = 8 \cdot 3000 = 24.000,\ \ TC = 5 \cdot 3000 + 2000 = 17.000$; fark 7000

Örnek (Çalışma Sorusu 3c): Tek bir ürün üreten bir firmanın kârı ile satış miktarı arasında $4q - 3\pi = 4000$ eşitliği var (q: adet, π: TL). π'yi q cinsinden yazınız. Kâr hangi satış miktarında sıfırdır? Kârın 2000 TL olması için kaç adet satılmalıdır? 1300 adet satılırsa kâr kaç TL olur? (s.48)

- $3\pi = 4q - 4000$, $\pi = \dfrac{4q - 4000}{3}$.
- Kâr sıfır: $4q - 4000 = 0$, $4q = 4000$, $q = 1000$ adet.
- Kâr 2000: $4q - 3 \cdot 2000 = 4000$, $4q - 6000 = 4000$, $4q = 10.000$, $q = 2500$ adet.
- 1300 adet: $\pi = \dfrac{4 \cdot 1300 - 4000}{3} = \dfrac{1200}{3} = 400$ TL.

Not: kitabınızda bu soruda (s.48) P'nin "x cinsinden" yazılması isteniyor, doğrusu q cinsindendir; 1300 adetteki kârın çözümünde de ilk kesirde 2400 değil, 1300 olmalıdır.

10 Tersten Sorular

Başa baş miktarı biliniyorsa denklemdeki bilinmeyen bir sayı bulunabilir:

- Başa baş noktasında gelir ve maliyet fonksiyonları eşitlenir: $R = TC$.
- Bilinen miktar bu denklemde yerine yazılır.
- Geriye tek bilinmeyen kalır: birim maliyet ya da fiyat bulunur.

Örnek: Bir ürünün gelir fonksiyonu $R = 40q$, sabit maliyeti 5000 TL. Bu üründen 1000 adet satılınca başa baş noktasına geliniyor. Birim maliyet kaç TL'dir? (M-1 s.174)

- Birim maliyet c olsun: $TC = c \cdot q + 5000$
- Başa baş noktasında gelir ve maliyet fonksiyonları eşitlenir: $R = TC$
- $q = 1000$ yerine yazılır: $40 \cdot 1000 = c \cdot 1000 + 5000$
- $40.000 = 1000\,c + 5000 \Rightarrow 1000\,c = 35.000 \Rightarrow c = 35$
- Kontrol: $40q = 35q + 5000 \Rightarrow 5q = 5000 \Rightarrow q = 1000$

Birim maliyet 35 TL'dir.

11 Fiyat Değişirse Başa Baş

Fiyat değişirse birim kâr değişir; bu da başa baş miktarını değiştirir.

Örnek: Bir ürünün sabit maliyeti 6300 TL, birim maliyeti 55 TL. Ürün 125 TL'den satılıyor. Başa baş miktarını bulunuz. Fiyat 145 TL'ye çıkarsa başa baş miktarı nasıl değişir?

- 125 TL'de: $125q = 55q + 6300 \Rightarrow 70q = 6300 \Rightarrow q = 90$
- 145 TL'de: $145q = 55q + 6300 \Rightarrow 90q = 6300 \Rightarrow q = 70$
- Başa baş miktarı 90'dan 70'e iner: 20 birim azalır.
- Fiyat artınca birim kâr artar (70'ten 90'a); sabit maliyet daha az birimle karşılanır.

Kısacası fiyat artınca birim kâr artar, başa baş miktarı azalır.

12 İki Seçeneği Karşılaştırma

- İki seçeneğin maliyeti: sabit ücret $+$ birim ücret $\cdot$ miktar.
- Maliyetlerin eşit olduğu miktarı bulmak için iki fonksiyon eşitlenir: $f(x) = g(x)$.
- Bu miktarın bir yanında bir seçenek, öbür yanında öbür seçenek ucuzdur.
- Sabit ücreti düşük olan küçük miktarlarda, birim ücreti düşük olan büyük miktarlarda avantajlıdır.
- Yöntem başa başla aynıdır: iki doğrunun kesişimi. Piyasa dengesi de iki doğrunun kesişimiydi.

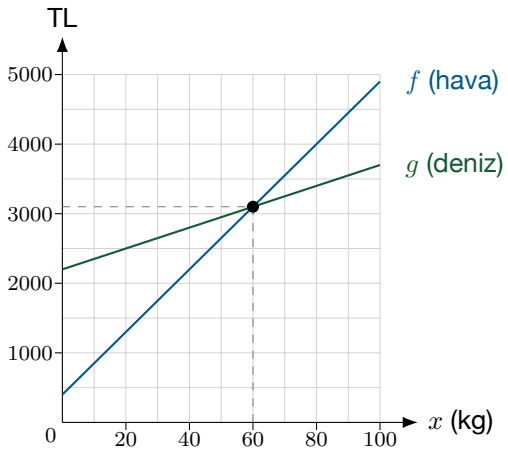
Örnek: Bir yük hava ya da deniz yoluyla gönderilecek. Hava yolunun maliyeti $f(x) = 45x + 400$, deniz yolununki $g(x) = 15x + 2200$ (x: kg, maliyet: TL). Kaç kg'da iki maliyet eşit olur? Hangi ağırlıklarda hava yolu daha ucuzdur?

- İki fonksiyon eşitlenir: $f(x) = g(x)$, yani $45x + 400 = 15x + 2200$
- $30x = 1800 \Rightarrow x = 60$
- $f(60) = 45 \cdot 60 + 400 = 3100$; kontrol: $g(60) = 15 \cdot 60 + 2200 = 3100$
- Hava yolu ucuz: $45x + 400 < 15x + 2200 \Rightarrow 30x < 1800 \Rightarrow x < 60$
- Yük yoksa taşıma da yoktur: $x > 0$. Sonuç $0 < x < 60$, yani $(0, 60)$

Ağırlık sürekli bir birim olduğu için sonuç aralıkla yazılır.

Aşağıdaki grafikte iki maliyet doğrusu görülüyor.

- Kesişim $(60,\ 3100)$: 60 kg'da iki maliyet eşit
- 60 kg'dan hafif yükte hava yolu ucuz: f doğrusu altta
- 60 kg'dan ağır yükte deniz yolu ucuz: g doğrusu altta
- Sabit ücreti düşük olan hava yolu küçük yükte, birim ücreti düşük olan deniz yolu büyük yükte avantajlı



13 Alıştırmalar

Temel Matematik, s.48-49; Matematik-I, s.174

Aşağıda slaytlardaki yedi alıştırma, slayttaki sırayla yer alıyor.

Alıştırma — İki Gözlemden Maliyet Fonksiyonu

Bir işletmenin toplam maliyeti doğrusaldır: 300 birimde 11.000 TL, 700 birimde 19.000 TL.

a) Maliyet fonksiyonunu bulunuz.
b) Fonksiyondaki iki sayı neyi gösterir?
c) Ürünün fiyatı 45 TL ise kâr fonksiyonunu yazınız.

Yöntem 5. haftadaki gibidir: önce eğim bulunur, sonra bir gözlem yerine yazılır.

- a) Eğim: $c = \dfrac{19.000 - 11.000}{700 - 300} = \dfrac{8000}{400} = 20$
- $q = 300$ yerine yazılır: $11.000 = 20 \cdot 300 + FC \Rightarrow FC = 5000$; $TC = 20q + 5000$
- Kontrol: $TC(700) = 14.000 + 5000 = 19.000$
- b) 20: birim maliyet; 5000: sabit maliyet
- c) $\pi = 45q - (20q + 5000) = 25q - 5000$

Alıştırma — Şeker Üreticisi

Şeker üreten bir firmanın sabit maliyeti 1000 TL. Bir şekerin maliyeti 15 TL; firma şekerin tanesini 25 TL'ye satıyor. Başa baş miktarını ve başa baş gelirini bulunuz. (s.48)

- $R = 25q$, $TC = 15q + 1000$
- Gelir ve maliyet fonksiyonları eşitlenir: $25q = 15q + 1000$
- $10q = 1000 \Rightarrow q = 100$ şeker
- Başa baş geliri: $R(100) = 25 \cdot 100 = 2500$ TL
- Kontrol: $TC(100) = 1500 + 1000 = 2500$

Not: kitabınızın s.48'deki Soru 2'si aynı firmanın kâr etmek için en az kaç şeker satması gerektiğini soruyor; çözümün sonundaki "$q > 100$ Adet" sonucu eksiktir, cevap en az 101 şekerdir.

Alıştırma — Başa Baş Var mı?

Bir ürünün sabit maliyeti 1500 TL, birim maliyeti 48 TL. Ürün 44 TL'den satılıyor. Bu ürün kaç birim satılırsa başa baş noktasına gelir?

- $44q = 48q + 1500 \Rightarrow -4q = 1500 \Rightarrow q = -375$
- Miktar negatif olamaz: başa baş noktası yok
- Birim kâr $44 - 48 = -4$: her birimde 4 TL zarar edilir
- Her miktarda zarar vardır; satış arttıkça zarar büyür
- Başa baş için fiyat birim maliyetten büyük olmalıdır ($p > c$)

Alıştırma — Kâr Hedefi

Şeker üreticisi alıştırmasındaki firma ($FC = 1000$ TL, $c = 15$ TL, $p = 25$ TL) 1000 TL kâr etmek için kaç şeker üretip satmalıdır? (s.49)

- $\pi = 25q - (15q + 1000) = 10q - 1000$
- Kâr hedefi: $10q - 1000 = 1000$
- $10q = 2000 \Rightarrow q = 200$ şeker
- Kontrol: $R = 25 \cdot 200 = 5000$, $TC = 15 \cdot 200 + 1000 = 4000$; fark 1000

Alıştırma — Kâr Hedefinden Fiyat

Bir ithalat işletmesinin aylık sabit giderleri 45.000 TL. Bir ürünün alışı, gümrüğü ve nakliyesi 850 TL tutuyor. İşletme ayda 190 ürün satıyor. Ayda 12.000 TL kâr etmek için ürünü kaç TL'ye satmalıdır?

- Fiyat p olsun; $q = 190$ yerine yazılır: $R = 190p$
- $TC = 850 \cdot 190 + 45.000 = 161.500 + 45.000 = 206.500$
- Kâr hedefi: $190p - 206.500 = 12.000$
- $190p = 218.500 \Rightarrow p = 1150$ TL
- Kontrol: $\pi = 300q - 45.000$; $\pi(190) = 57.000 - 45.000 = 12.000$

Bu da bir tersten sorudur: miktar bilinir, fiyat bulunur.

Alıştırma — Kurye Seçimi

Bir işletme kurye firması seçecek. A firmasının aylık ücreti sabit ücret ve paket ücretinden oluşur: 200 pakette 7600 TL, 500 pakette 16.600 TL. B firması aylık 2000 TL ve paket başına 45 TL alıyor. B firması hangi paket sayılarında daha ucuzdur?

- x: aylık paket sayısı. A: eğim $\dfrac{16.600 - 7600}{500 - 200} = \dfrac{9000}{300} = 30$
- Sabit ücret $= 7600 - 30 \cdot 200 = 1600$
- A: $f(x) = 30x + 1600$, B: $g(x) = 45x + 2000$
- B ucuz: $45x + 2000 < 30x + 1600 \Rightarrow 15x < -400 \Rightarrow x < -400/15 \approx -26{,}7$
- Paket sayısı negatif olamaz: B hiçbir paket sayısında ucuz değil; A her durumda ucuz

A'nın hem sabit ücreti hem paket ücreti B'ninkinden düşüktür. Bu yüzden iki doğru, paket sayısının negatif olmadığı kısımda ($x \geq 0$) kesişmez.

Alıştırma — 1. Haftanın Sorusu

1. haftada sorduğumuz soru: Gömlek ithal edip satıyorsunuz. Yıllık sabit giderleriniz 600.000 TL. Her gömlek size 300 TL'ye mal oluyor, siz 500 TL'ye satıyorsunuz. 1. haftada sohbet botu başa baş miktarını 3000 buldu. Doğru mu? Denklemi çözmeden kontrol ediniz. Yılda 5000 gömlek satarsanız kârınız ne olur? (M-1 s.174)

- $q = 3000$ yerine yazılır: $R(3000) = 500 \cdot 3000 = 1.500.000$
- $TC(3000) = 300 \cdot 3000 + 600.000 = 900.000 + 600.000 = 1.500.000$
- Gelir maliyete eşit: 3000 başa baş miktarıdır, cevap doğru
- $\pi = 200q - 600.000$; $\pi(5000) = 200 \cdot 5000 - 600.000 = 400.000$ TL kâr

Bir cevabı kontrol etmek için denklemi yeniden çözmek gerekmez: bulunan sayı yerine yazılır ve $R = TC$ olup olmadığına bakılır.

Çalışma soruları, ders malzemelerinin paylaşıldığı adreste yayımlanır:
https://eozyerden.github.io/4170109-matematik/

Metin içinde (s.36) gibi işaretlenmiş örnek ve sorular şu kaynaktan alınmış veya uyarlanmıştır: Eroğlu, E. Temel Matematik. İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi.
(M-1 s.174) işaretli olanlar ise: Eroğlu, E. Matematik-I. İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi.