5. Hafta — Arz, Talep ve Piyasa Dengesi

4170109 Matematik

1 İki Doğrunun Kesişimi

Temel Matematik, s.87

İki doğrunun ikisinin de üzerinde olan noktaya **kesişim noktası** denir. Bu noktada iki doğrunun x'i de y'si de aynıdır. Bu yüzden kesişim noktası şöyle bulunur:

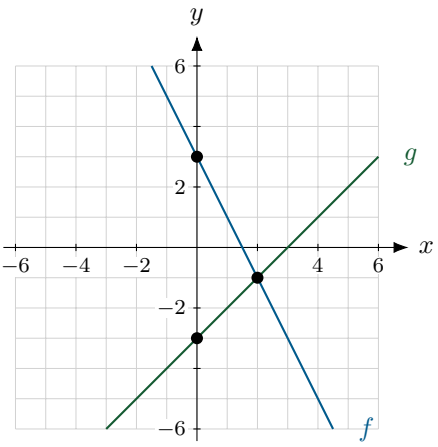
- İki fonksiyon eşitlenir: $f(x) = g(x)$. Bu denklemden x bulunur.
- Bulunan x, fonksiyonlardan birinde yerine yazılır; y bulunur.
- Öbür fonksiyon da aynı y'yi vermelidir. Bu, kontroldür.

Bu, 2. haftadaki denklem sistemi çözümünün aynısıdır. 2. haftada $2x+y=8$ ve $y-x=2$ sistemini şöyle çözmüştük:

- İkinci denklemden y çekilir: $y = x + 2$
- Birinci denklemde yerine yazılır: $2x + (x + 2) = 8$, $x = 2$
- $y = 2 + 2 = 4$; çözüm $(2, 4)$

Örnek: $f(x) = -2x + 3$ ve $g(x) = x - 3$ doğrularının kesişim noktasını bulup iki doğruyu çiziniz. (s.87)

- $-2x + 3 = x - 3$
- $-2x - x = -3 - 3$, yani $-3x = -6$
- $x = 2$; $y = f(2) = -2 \cdot 2 + 3 = -1$
- Kontrol: $g(2) = 2 - 3 = -1$; kesişim noktası $(2, -1)$
- Çizim için: f doğrusu $(0, 3)$ ve $(2, -1)$ noktalarından, g doğrusu $(0, -3)$ ve $(2, -1)$ noktalarından geçer.



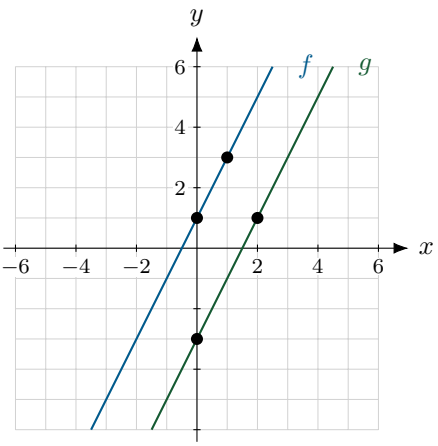
Not: kitabınızda bu örneğin şeklinde (s.87) iki doğru da f diye etiketlenmiş; $x-3$ doğrusu metinde g'dir.

Eğimleri aynı, sabit terimleri farklı iki doğru **paralel**dir: hiçbir noktada kesişmezler.

- Paralel iki doğrunun fonksiyonları eşitlenince x'li terimler gider ve yanlış bir eşitlik kalır. Bu, ortak nokta olmadığını gösterir.
- Kalan eşitlik doğru çıksaydı ($1 = 1$ gibi), iki denklem aynı doğruyu gösterirdi; doğruların her noktası ortak olurdu.
- Doğrular $ax + by + c = 0$ biçiminde verilmişse önce y yalnız bırakılır (4. hafta). Eğimler ve sabit terimler böyle karşılaştırılır.

Örnek: $f(x) = 2x + 1$ ve $g(x) = 2x - 3$ doğruları kesişir mi? İki doğruyu çiziniz.

- İki fonksiyon eşitlenir: $f(x) = g(x)$, yani $2x + 1 = 2x - 3$
- $2x$'ler gider: $1 = -3$. Bu eşitlik hiçbir x için doğru değildir.
- Ortak nokta yoktur: doğrular kesişmez.
- İki doğrunun eğimi aynı (2), sabit terimleri farklı: doğrular paraleldir.
- Çizim için: f doğrusu $(0, 1)$ ve $(1, 3)$ noktalarından, g doğrusu $(0, -3)$ ve $(2, 1)$ noktalarından geçer.



2 Arz ve Talep

Temel Matematik, s.87-88

Bir malın fiyatı ile miktarı arasındaki ilişkiye iki taraftan bakılır:

- **Talep** (demand): tüketicilerin bir maldan almak istediği miktardır. Fiyat yükselince talep edilen miktar azalır.
- **Arz** (supply): üreticilerin bir malı satmak istediği miktardır. Fiyat yükselince arz edilen miktar artar.

Bu ilişkiye bakarken diğer koşullar sabit tutulur; yalnızca fiyat ile miktar arasındaki ilişkiye bakılır.

- Bu derste fiyat, miktara bağlı yazılır: $p = f(q)$. Burada q miktar, p o miktarın fiyatıdır.
- Grafikte miktar (q) yatay eksende, fiyat (p) düşey eksendedir.
- Talep doğrusu azalan, arz doğrusu artan bir doğrudur.

3 Değer Tablosu

$p = f(q)$ biçiminde verilen bir fonksiyonda q verilince p hesaplanır. p verilince denklem kurulur ve q bulunur (4. hafta, değer tablosu).

Örnek: Talep $p = -10q + 110$, arz $p = 8q + 20$ (q: birim, p: TL). Tabloyu doldurunuz. Son sütunda talep fiyatı verilmiş, miktarı bulunuz. İki fiyat hangi sütunda eşit?

q	1	2	3	4	5	6
Talep fiyatı p	100	90	80	70	60	50
Arz fiyatı p	28	36	44	52	60	68

- Örneğin $q = 1$: talep $-10 \cdot 1 + 110 = 100$, arz $8 \cdot 1 + 20 = 28$
- Son sütun: $-10q + 110 = 50 \Rightarrow -10q = -60 \Rightarrow q = 6$; arz fiyatı $8 \cdot 6 + 20 = 68$
- $q = 5$'te iki fiyat da 60 TL.

4 Eğimin Ekonomik Yorumu

Eğim, değişim oranıdır (4. hafta). $p = f\,(q)$'da eğim, miktar 1 birim artınca fiyattaki değişimdir.

- Talep $p = -10q + 110$: eğim -10. Miktar 1 birim artınca fiyat 10 TL düşer.
- Arz $p = 8q + 20$: eğim 8. Miktar 1 birim artınca fiyat 8 TL yükselir.
- Talep doğrusunun eğimi negatiftir (azalan doğru); arz doğrusunun eğimi pozitiftir (artan doğru).
- Tabloda da görülür: talep fiyatı 10'ar azalır, arz fiyatı 8'er artar.

Eğim -10 iken "fiyat -10 azalır" denmez; işaret "düşer" sözcüğündedir.

Miktar birden fazla birim artarsa fiyattaki değişim, eğim çarpı miktardaki artıştır: $\Delta p = m \cdot \Delta q$. Örneğin talepte miktar 3 birim artarsa fiyat $10 \cdot 3 = 30$ TL düşer. Fiyat ile miktarın birlikte nasıl değiştiği biliniyorsa eğim $m = \dfrac{\Delta p}{\Delta q}$ ile bulunur.

Örnek (Çalışma Sorusu 4): Bir ürünün talep fonksiyonu $p = -3q + 75$'tir (q: adet, p: TL).

a) Eğim olan -3'ün anlamını bir cümleyle yazınız.
b) Talep edilen miktarın 4 adet artması için fiyat kaç TL düşmelidir?
c) Fiyat 15 TL düşerse talep edilen miktar kaç adet artar?

- a) Talep edilen miktar 1 adet artınca fiyat 3 TL düşer.
- b) $\Delta p = m \cdot \Delta q = -3 \cdot 4 = -12$: fiyat 12 TL düşmelidir.
- c) Fiyat 15 TL düşüyor, yani $\Delta p = -15$: $-3 \cdot \Delta q = -15$, $\Delta q = 5$. Talep edilen miktar 5 adet artar.

5 Piyasa Dengesi

Temel Matematik, s.88

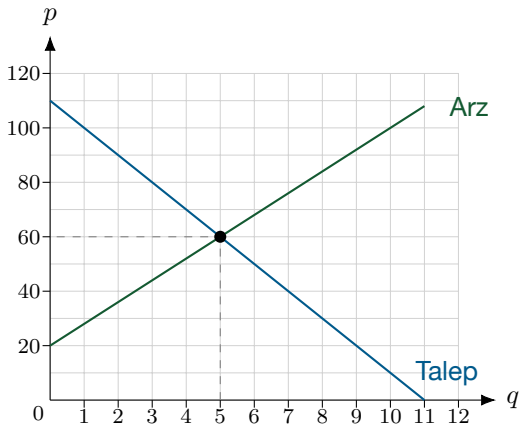
Piyasa dengesi (market equilibrium): aynı miktarda arz fiyatı ile talep fiyatının eşit olduğu noktadır. Bu fiyatta üreticilerin satmak istediği miktar, tüketicilerin almak istediği miktara eşittir.

- Piyasa dengesini bulmak için arz ve talep fonksiyonları eşitlenir. Bu denklemden miktar bulunur.
- Bulunan miktar, fonksiyonlardan birinde yerine yazılır; fiyat bulunur.
- Bulunan miktar **denge miktarı**, fiyat **denge fiyatı**dır.
- Grafikte piyasa dengesi, arz doğrusu ile talep doğrusunun kesişim noktasıdır. Yöntem, iki doğrunun kesişiminin aynısıdır.

Örnek: Değer tablosundaki arz ve talep, $p = 8q + 20$ ve $p = -10q + 110$. Tabloda $q = 5$'te iki fiyat eşitti. Piyasa dengesini denklemle bulunuz.

- Arz ve talep fonksiyonları eşitlenir: $8q + 20 = -10q + 110$
- $8q + 10q = 110 - 20 \Rightarrow 18q = 90 \Rightarrow q = 5$
- $p = 8 \cdot 5 + 20 = 60$; kontrol: $-10 \cdot 5 + 110 = 60$
- Denge miktarı 5 birim, denge fiyatı 60 TL

Aşağıdaki grafikte bu iki doğru ve piyasa dengesi görülüyor. (s.88)



- Arz: $p = 8q + 20$, artan doğru
- Talep: $p = -10q + 110$, azalan doğru; $q = 11$'de fiyat 0 olur
- Kesişim noktası $(5, 60)$: piyasa dengesi
- Denge miktarı 5 birim, denge fiyatı 60 TL

Not: kitabınızda (s.88) metindeki talep ($q = 110 - 10p$) Şekil 4.12'de çizilmemiş; şekildeki iki denklem etiketi de karşı doğrunun yanında duruyor.

6 Negatif Fiyat ve Miktar Olur mu?

- Fiyat ve miktar negatif olamaz ($q \geq 0$, $p \geq 0$). Sıfır olabilir.
- Bu yüzden arz ve talep grafikleri yalnızca miktarın ve fiyatın negatif olmadığı kısımda (sağ üstte) çizilir.
- Hesapla bulunan kesişimde miktar ya da fiyat negatifse bu nokta bir piyasa dengesi değildir: o mal için piyasa oluşmaz.

Eksen Kesişimlerinin Anlamı

Arz ve talep doğrusunun p eksenini kestiği yerin de bir anlamı vardır. Piyasa Dengesi bölümündeki grafiğe bakalım:

- Talep $p = -10q + 110$: $q = 0$'da $p = 110$. Fiyat 110 TL'ye çıkınca kimse almaz.
- Arz $p = 8q + 20$: $q = 0$'da $p = 20$. Fiyat 20 TL'yi geçmedikçe üretici hiç satmaz; arz 20 TL'nin üstünde başlar.

Arz doğrusunun p eksenini pozitif bir yerde kesmesi olağan durumdur. p eksenini negatif bir yerde kesen bir arz (ör. 1. haftanın sorusu $p = 2q - 15$; Alıştırmalar'ın sonunda), fiyat sıfırken de arz olduğu anlamına gelir; bu olağan değildir.

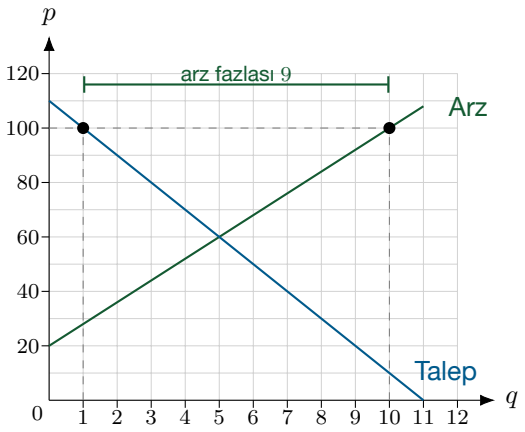
7 Dengeden Farklı Fiyat

Bu konu kitapta yok; slaytlar ve bu not esas alınmalıdır.

- Fiyat denge fiyatından farklıysa arz edilen ve talep edilen miktar eşit olmaz.
- Fiyat denge fiyatının üstündeyse arz edilen miktar daha fazladır. Buna **arz fazlası** (excess supply) denir: satılamayan mal kalır.
- Fiyat denge fiyatının altındaysa talep edilen miktar daha fazladır. Buna **talep fazlası** (excess demand) denir: mal yetmez.
- Miktarlar için verilen fiyat iki denklemde de p yerine yazılır; iki ayrı miktar bulunur.
- Arz fazlası ya da talep fazlası, büyük miktardan küçük miktar çıkarılarak bulunur.

Örnek: Talep $p = -10q + 110$, arz $p = 8q + 20$ (denge fiyatı 60 TL). Fiyat 100 TL olursa talep edilen ve arz edilen miktar kaçtır? Arz fazlası mı, talep fazlası mı vardır?

- $100 > 60$: fiyat dengenin üstünde
- Talep: $-10q + 110 = 100 \Rightarrow -10q = -10 \Rightarrow q = 1$
- Arz: $8q + 20 = 100 \Rightarrow 8q = 80 \Rightarrow q = 10$
- Arz edilen (10) talep edilenden (1) fazla: arz fazlası, $10 - 1 = 9$ birim
- Grafikte $p = 100$ yatay çizgisi talep doğrusunu $q = 1$'de, arz doğrusunu $q = 10$'da keser.



8 İki Gözlemden Talep Fonksiyonu

Talep doğrusalsa iki gözlem (iki fiyat ve bu fiyatlardaki miktar) talep fonksiyonunu belirler:

- Gözlemler (q, p) noktası olarak yazılır: önce miktar, sonra fiyat.
- Eğim bulunur: iki fiyatın farkı, iki miktarın farkına bölünür.
- Nokta-eğim denklemi yazılır (4. hafta) ve p yalnız bırakılır.
- Eğim ve bir gözlem biliniyorsa da aynı yol izlenir.

Örnek: Bir malın tonu 80 bin TL iken talep edilen miktar 10 ton, tonu 40 bin TL iken 20 ton. Talep doğrusaldır. Talep fonksiyonunu $p = f(q)$ biçiminde yazınız (q: ton, p: ton fiyatı, bin TL).

- Gözlemler (q, p) noktası olarak: $(10, 80)$ ve $(20, 40)$
- Eğim: $m = \dfrac{40 - 80}{20 - 10} = \dfrac{-40}{10} = -4$
- $p - 80 = -4(q - 10)$
- $p = -4q + 40 + 80$, yani $p = -4q + 120$
- Kontrol: $q = 20$ için $p = -4 \cdot 20 + 120 = 40$

Eğim -4: miktar 1 ton artınca ton fiyatı 4 bin TL düşer.

9 Talebin Anlamlı Aralığı

Fiyat ve miktar negatif olamaz. Bu iki koşul, talep fonksiyonunda miktarın alabileceği değerleri sınırlar.

Örnek: Önceki örnekteki talep fonksiyonu $p = -4q + 120$ (q: ton, p: ton fiyatı, bin TL). Fiyat ve miktar negatif olamaz. q hangi aralıkta olabilir?

- Miktar negatif olamaz: $q \geq 0$
- Fiyat negatif olamaz: $-4q + 120 \geq 0$
- $-4q \geq -120 \Rightarrow q \leq 30$ (negatif sayıya bölünce yön değişir)
- $0 \leq q \leq 30$, yani $[0, 30]$
- $q = 0$'da ton fiyatı 120 bin TL, $q = 30$'da ton fiyatı 0

Aralığın uçları, talep doğrusunun eksenleri kestiği noktalardır:

- $(0, 120)$: ton fiyatı 120 bin TL olunca hiç talep olmaz.
- $(30, 0)$: mal bedava olsa en çok 30 ton talep edilir.

Bu aralık, talep fonksiyonunun **anlamlı tanım kümesi**dir (3. hafta). Ton sürekli bir birim olduğu için aralık yazılır. Miktar adet, kişi gibi sayılabilir bir birimse sonuç tam sayıyla ve sözle yazılır. Örneğin $q \leq 30{,}5$ çıksaydı ve miktar adet olsaydı sonuç "en fazla 30 adet" olurdu; tanım kümesi de $\{0, 1, 2, \ldots, 30\}$ olurdu.

10 Tersten Sorular

Arz ya da talep fonksiyonunda bir katsayı bilinmiyorsa ve denge miktarı ya da denge fiyatı verilmişse:

- Denge, iki doğrunun ortak noktasıdır.
- Önce denklemi tam bilinen doğrudan bu nokta bulunur.
- Sonra noktanın q ve p değeri öbür denklemde yerine yazılır; katsayı bulunur.

İki fonksiyonu hemen eşitlemek her zaman yetmez: denge fiyatı verildiğinde $2q + 20 = -3q + b$ (aşağıdaki ikinci örnek) denkleminde hem q hem b bilinmez. Bu yüzden önce nokta bulunur.

Örnek: Talep $p = -5q + 130$, arz $p = 3q + c$. Denge miktarı 10 ise c kaçtır? Denge fiyatı nedir?

- Denge miktarı 10; talep doğrusundan $p = -5 \cdot 10 + 130 = 80$
- $(10, 80)$ arz doğrusu üzerinde de: $80 = 3 \cdot 10 + c$
- $80 = 30 + c \Rightarrow c = 50$; arz $p = 3q + 50$, denge fiyatı 80
- Kontrol: $3q + 50 = -5q + 130 \Rightarrow 8q = 80 \Rightarrow q = 10$

Örnek: Arz $p = 2q + 20$, talep $p = -3q + b$. Denge fiyatı 50 ise b kaçtır?

- Denge fiyatı 50; arz doğrusundan $50 = 2q + 20 \Rightarrow 2q = 30 \Rightarrow q = 15$
- $(15, 50)$ talep doğrusu üzerinde de: $50 = -3 \cdot 15 + b$
- $50 = -45 + b \Rightarrow b = 95$; talep $p = -3q + 95$
- Kontrol: $2q + 20 = -3q + 95 \Rightarrow 5q = 75 \Rightarrow q = 15$

11 Alıştırmalar

Aşağıda slaytlardaki yedi alıştırma, slayttaki sırayla yer alıyor.

Alıştırma — Kesişimin Anlamı

Bir malın arz fonksiyonu $p = 4q + 17$, talep fonksiyonu $p = -q + 2$'dir (p: TL). İki doğrunun kesişim noktasını bulunuz. Bu malın piyasası oluşur mu?

- $4q + 17 = -q + 2 \Rightarrow 5q = -15 \Rightarrow q = -3$
- $p = -(-3) + 2 = 5$; kesişim noktası $(-3, 5)$
- Miktar negatif: bu nokta piyasa dengesi olamaz.
- Talep p eksenini 2'de, arz 17'de keser. Fiyat 2 TL'ye çıkınca kimse almaz; fiyat 17 TL'yi geçmedikçe üretici hiç satmaz. Arz, talebin bittiği yerin üstünde başlar: piyasa oluşmaz.

Genel olarak: arzın sabit terimi talebin sabit teriminden büyükse doğrular miktarın negatif olmadığı kısımda kesişmez; piyasa oluşmaz.

Alıştırma — Piyasa Dengesi

Bir ürünün arz fonksiyonu $p = 2q+5$, talep fonksiyonu $p = -2q+10$'dur. Piyasa dengesini bulunuz. (s.90)

- $2q + 5 = -2q + 10 \Rightarrow 4q = 5 \Rightarrow q = \dfrac{5}{4}$
- $p = 2 \cdot \dfrac{5}{4} + 5 = \dfrac{5}{2} + 5 = \dfrac{15}{2}$
- Kontrol: $-2 \cdot \dfrac{5}{4} + 10 = -\dfrac{5}{2} + 10 = \dfrac{15}{2}$
- Denge: $q = \dfrac{5}{4} = 1{,}25,\ \ p = \dfrac{15}{2} = 7{,}5$

Alıştırma — Kesişimden Katsayı

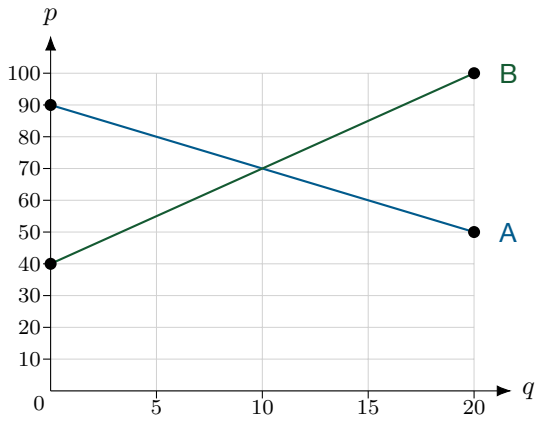
$f(x) = ax + 1$ ve $g(x) = -x + 7$ doğruları $x = 2$'de kesişiyor. a kaçtır?

- Kesişim noktası g doğrusu üzerinde: $g(2) = -2 + 7 = 5$, nokta $(2, 5)$
- Bu nokta f doğrusu üzerinde de: $f(2) = 2a + 1 = 5$
- $2a = 4 \Rightarrow a = 2$
- Kontrol: $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

Alıştırma — Grafikten Arz ve Talep

Grafikte bir malın arz ve talep doğruları var. Hangisi talep, hangisi arz? İki denklemi $p = f(q)$ biçiminde yazınız. Piyasa dengesini hesaplayıp grafikle karşılaştırınız.

- A azalan: talep. B artan: arz.
- Talep: $(0, 90)$ ve $(20, 50)$;
  $m = (50 - 90)/20 = -2$; $p = -2q + 90$
- Arz: $(0, 40)$ ve $(20, 100)$;
  $m = (100 - 40)/20 = 3$; $p = 3q + 40$
- $3q + 40 = -2q + 90 \Rightarrow 5q = 50 \Rightarrow q = 10$,
  $p = 70$; grafikteki kesişim de $(10, 70)$
- Doğrunun p eksenini kestiği yer sabit terimdir: 90 ve 40 grafikten doğrudan okunur.



Alıştırma — Dengeden Farklı Fiyat

Bir malın arz fonksiyonu $p = 2q + 10$, talep fonksiyonu $p = -3q + 60$'tır (p: TL). Piyasa dengesini bulunuz. Fiyat 24 TL olursa arz fazlası mı, talep fazlası mı olur? Kaç birim?

- Denge: $2q + 10 = -3q + 60 \Rightarrow 5q = 50 \Rightarrow q = 10$, $p = 30$
- $24 < 30$: fiyat dengenin altında
- Arz: $2q + 10 = 24 \Rightarrow 2q = 14 \Rightarrow q = 7$
- Talep: $-3q + 60 = 24 \Rightarrow -3q = -36 \Rightarrow q = 12$
- Talep edilen (12) arz edilenden (7) fazla: talep fazlası, $12 - 7 = 5$ birim

Alıştırma — Arz ve Talep Başka Biçimde

Bir ürünün arz denklemi $2p - q = 60$, talep denklemi $3q + 4p = 240$'tır (p: TL, q: adet). İki denklemi $p = f\,(q)$ biçiminde yazıp piyasa dengesini bulunuz. (s.89)

- Arz: $2p = q + 60 \Rightarrow p = \dfrac{q}{2} + 30$
- Talep: $4p = -3q + 240 \Rightarrow p = -\dfrac{3q}{4} + 60$
- $\dfrac{q}{2} + 30 = -\dfrac{3q}{4} + 60$; iki taraf 4 ile çarpılır: $2q + 120 = -3q + 240$
- $5q = 120 \Rightarrow q = 24$; $\;p = \dfrac{24}{2} + 30 = 42$
- Denge: 24 adet, 42 TL. Kontrol: $2 \cdot 42 - 24 = 60$, $\;3 \cdot 24 + 4 \cdot 42 = 240$

Not: kitabınızda bu sorunun çözümünde (s.89) sonuç $q = 120$, $p = 90$ bulunmuş; bu sonuç yanlıştır, doğrusu $q = 24$, $p = 42$'dir.

Alıştırma — 1. Haftanın Sorusu

1. haftada sorduğumuz soru: Bir ürünün arz denklemi $p = 2q - 15$, talep denklemi $p = -5q + 48$'dir. Piyasa dengesini bulunuz. (s.52)

- $2q - 15 = -5q + 48$
- $7q = 63 \Rightarrow q = 9$
- $p = 2 \cdot 9 - 15 = 3$; kontrol: $-5 \cdot 9 + 48 = 3$
- Denge miktarı 9, denge fiyatı 3

Bu arz olağan değildir: p eksenini -15'te keser, yani fiyat sıfırken de 7,5 birim arz edilir.

Çalışma soruları, ders malzemelerinin paylaşıldığı adreste yayımlanır:
https://eozyerden.github.io/4170109-matematik/

Metin içinde (s.87) gibi işaretlenmiş örnek ve sorular şu kaynaktan alınmış veya uyarlanmıştır: Eroğlu, E. Temel Matematik. İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi.