4. Hafta — Eğim ve Değişim Oranı

4170109 Matematik

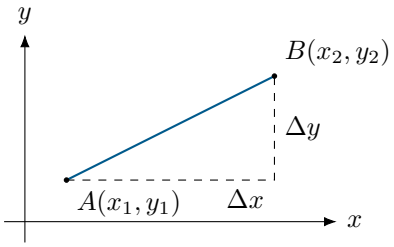
1 Doğrunun Eğimi

Temel Matematik, s.81-83

Doğru üzerindeki iki nokta arasında y'deki değişimin x'teki değişime oranına doğrunun **eğimi** denir. $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları için:

$$\text{Eğim} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Δ "fark" demektir.
- Δx yatay değişim, Δy düşey değişimdir.
- Pay y'lerin farkı, payda x'lerin farkıdır.



Örnek: $A(-3, 0)$ ve $B(0, 2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini bulunuz. B'yi 1. nokta, A'yı 2. nokta alırsak sonuç değişir mi? (s.82)

- 1. nokta A, 2. nokta B: $(x_1, y_1) = (-3, 0)$, $(x_2, y_2) = (0, 2)$. $\quad m = \dfrac{2-0}{0-(-3)} = \dfrac{2}{3}$
- 1. nokta B, 2. nokta A: $(x_1, y_1) = (0, 2)$, $(x_2, y_2) = (-3, 0)$. $\quad m = \dfrac{0-2}{-3-0} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$

Sonuç değişmez. Önemli olan, pay ile paydada çıkarmayı aynı sırayla yapmaktır: paydaki ilk y hangi noktanınsa paydadaki ilk x de o noktanın olmalıdır.

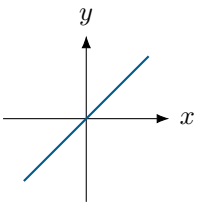
Not: kitabınızda Şekil 4.5'in içinde (s.82) "Eğim $= m = -2/3$" yazıyor; doğrusu $2/3$.

2 Eğimin İşareti

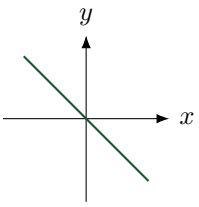
Temel Matematik, s.80-81

Grafiği soldan sağa okuyun.

- **Pozitif** eğim: x artarken y artar. Böyle bir doğruya **artan doğru** denir; doğru sağa yatıktır.
- **Negatif** eğim: x artarken y azalır. Böyle bir doğruya **azalan doğru** denir; doğru sola yatıktır.



Pozitif eğim: sağa yatık



Negatif eğim: sola yatık

Not: kitabınızda (s.81) "bağımlı x ve bağımsız y" yazıyor; doğrusu x **bağımsız**, y **bağımlı** değişkendir (x'e değeri biz veririz; y bu değere bağlıdır).

Eğim sıfır da olabilir, tanımsız da olabilir:

- **Yatay doğru** ($y = b$): y sabittir, $\Delta y = 0$, eğim 0'dır. Yatay doğru x eksenine paraleldir.
- **Düşey doğru** ($x = c$): x sabittir, $\Delta x = 0$. Sıfıra bölme olur; eğim **tanımsızdır**. Düşey doğru y eksenine paraleldir.

"Eğim sıfır" ile "eğim tanımsız" aynı şey değildir: $\dfrac{0}{3} = 0$, ama $\dfrac{3}{0}$ tanımsızdır. Düşey doğru zaten fonksiyon tanımına uymuyordu (3. hafta, düşey doğru testi).

Not: kitabınızda Şekil 4.2'de (s.80) düşey doğru için "Eğim: ∞" yazıyor. ∞ bir sayı değildir; bu derste düşey doğrunun eğimine "tanımsız" diyoruz.

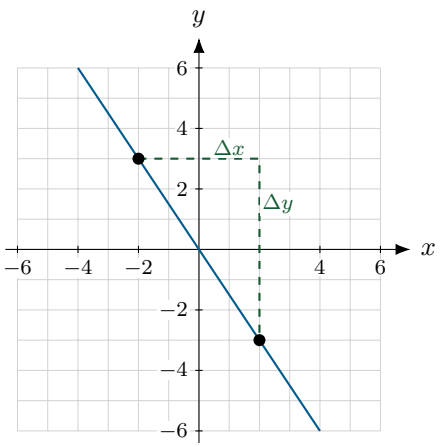
3 Grafikten Eğim

Grafiği verilen bir doğrunun eğimi şöyle bulunur:

- Doğru üzerinde koordinatları okunabilen iki nokta seçilir. Nokta (x, y) sırasıyla okunur. Eksende yazılı olmayan sayılar için ızgaranın kareleri sayılır.
- Δx ve Δy bulunur, $m = \Delta y / \Delta x$ hesaplanır.

Örnek: Aşağıdaki doğrunun eğimini grafikten bulunuz.

- İşaretli noktalar: $(-2, 3)$ ve $(2, -3)$
- $\Delta x = 2 - (-2) = 4$
- $\Delta y = -3 - 3 = -6$
- $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-6}{4} = -\dfrac{3}{2}$
- Eğim negatif: doğru azalandır, sola yatıktır.



4 Eğim ve Değişim Oranı

x bir birim arttığında y'de meydana gelen değişime **değişim oranı** denir. Bir doğruda değişim oranı eğime eşittir.

- Eğim pozitifse y artar, negatifse y azalır, sıfırsa y değişmez.
- Doğrusal bir fonksiyonda bu değişim her yerde aynıdır. Bu yüzden bir doğrunun eğimi, üzerinde hangi iki nokta seçilirse seçilsin aynıdır.
- Üç noktanın aynı doğru üzerinde olup olmadığı eğimlerle anlaşılır.
- x birden fazla birim artarsa y'deki değişim, eğim çarpı x'teki artıştır: $\Delta y = m \cdot \Delta x$.

Kitapta bu fikir türev bölümünde (s.182) geçer: doğrusal fonksiyonda x değişirken y'nin değişim oranı sabittir.

Örnek: $f(x) = 3x + 2$ fonksiyonunda x, 5'ten 6'ya (1 birim) arttığında $f(x)$ ne kadar değişir? Bu sayı fonksiyonun neresinde görünüyor?

- $f(5) = 3 \cdot 5 + 2 = 17, \quad f(6) = 3 \cdot 6 + 2 = 20$
- Değişim: $f(6) - f(5) = 20 - 17 = 3$
- Değişim 3, x'in katsayısıdır. $f(x) = ax + b$'de a eğimdir.

Örnek: $(-2, 3)$, $(0, 0)$ ve $(2, -3)$ noktaları aynı doğru üzerinde mi?

- $(-2, 3)$ ile $(0, 0)$ arasındaki eğim: $m = \dfrac{0 - 3}{0 - (-2)} = \dfrac{-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$
- $(0, 0)$ ile $(2, -3)$ arasındaki eğim: $m = \dfrac{-3 - 0}{2 - 0} = \dfrac{-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$
- İki eğim de $-\dfrac{3}{2}$: üç nokta aynı doğru üzerindedir. Bu doğru, 3. bölümün ilk örneğinde çizili doğrudur.

5 Değer Tablosu

x'e verilen değerlerin ve bunlara karşılık gelen y değerlerinin yazıldığı tabloya **değer tablosu** denir. Değer tablosu, bir doğruyu çizmenin bir başka yoludur.

- x'e birkaç değer verilir.
- Karşılık gelen y değeri hesaplanır.
- Bulunan noktalar düzleme işaretlenir.
- Noktalar birleştirilir.

Doğru için iki nokta yeter; fazlası kontrol içindir.

Örnek: $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonu için tabloyu doldurunuz. Son sütunda y verilmiş; x'i bulunuz.

x	-2	-1	0	1	2	4
y	-5	-3	-1	1	3	7

- Örneğin $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 1 = -4 - 1 = -5$. Negatif sayı parantezle yerine yazılır.
- Son sütun: $2x - 1 = 7 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

Tablo tersten de okunur. Bu tabloda x 1 arttığında y hep 2 artıyor: eğim 2'dir. $x = 0$ sütunundaki y değeri -1'dir: bu, sabit terimdir. Fonksiyon $f(x) = 2x - 1$ olarak yeniden bulunur.

Örnek (Çalışma Sorusu 8): Aşağıdaki tablo doğrusal bir fonksiyona aittir. Fonksiyonu yazınız.

x	0	1	2	3
y	3	5	7	9

- x 1 arttığında y hep 2 artıyor: eğim $a = \dfrac{5-3}{1-0} = 2$
- $x = 0$ için $y = 3$: sabit terim $b = f(0) = 3$
- $f(x) = 2x + 3$. Kontrol: $f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$

6 Doğru Denklemi

Temel Matematik, s.83-85

Bir doğrunun eğimi ve üzerindeki bir noktası biliniyorsa denklemi şöyle yazılır:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Bu denkleme **nokta-eğim denklemi** denir.

- (x_1, y_1) bilinen nokta, m bilinen eğimdir.
- x_1, y_1 ve m yerine yazılır; x ve y harf olarak kalır.
- Sonda y yalnız bırakılır.

Örnek: Eğimi 3 olan ve $(1, 2)$ noktasından geçen doğrunun denklemini yazınız.

- $y - 2 = 3(x - 1)$
- $y = 3x - 3 + 2$
- $y = 3x - 1$. Kontrol: $x = 1$ için $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$

Örnek: Eğimi $\frac{2}{3}$ olan ve $(0, 2)$ noktasından geçen doğrunun denklemini yazınız. (s.83)

- $y - 2 = \frac{2}{3}(x - 0)$
- $y = \frac{2}{3}x + 2$

Nokta y ekseninde olduğu için sabit terim doğrudan 2 çıktı. Bu doğru, 1. bölümdeki $A(-3, 0)$ ve $B(0, 2)$ noktalarından geçen doğrudur.

İki nokta biliniyorsa önce eğim, sonra denklem bulunur.

Örnek: $(-1, -1)$ ve $(1, 3)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız. (s.84-85)

- $m = \frac{3 - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{4}{2} = 2$
- $y - (-1) = 2(x - (-1))$
- $y + 1 = 2x + 2$
- $y = 2x + 1$

İkinci nokta $(1, 3)$ ile de aynı denklem çıkar: $y - 3 = 2(x - 1)$, $y = 2x - 2 + 3 = 2x + 1$.

Not: kitabınızda (s.84) iki noktadan doğru denklemi formülünde baskı hatası var; bu derste önce eğimi bulup nokta-eğim denklemini kullanıyoruz.

7 Doğrunun İki Gösterimi ve Denklemden Eğim

Temel Matematik, s.79

Bir doğru iki biçimde yazılabilir:

- $f(x) = ax + b$ biçimi (geçen hafta kullandık)
- $ax + by + c = 0$ biçimi (aynı doğrunun başka yazılışı)

İkinci biçimde de eksen kesişimleri aynı yöntemle bulunur: x yerine 0 yazılır, sonra y yerine 0 yazılır.

$ax + by + c = 0$ biçiminde eğim şöyle bulunur:

- Önce y yalnız bırakılır (y'nin katsayısı sıfır değilse).
- Yalnız bırakınca x'in katsayısı eğimdir. Bu katsayı, $ax + by + c = 0$'daki a ile aynı olmak zorunda değildir.
- y'nin katsayısı sıfırsa doğru düşeydir; eğimi tanımsızdır.

Bu yöntem kitapta ayrıca anlatılmıyor; slaytlar ve bu not esas alınmalıdır.

Örnek: $2x + 5y - 10 = 0$ doğrusunun eğimini bulunuz.

- y yalnız bırakılır: $5y = -2x + 10$
- $y = -\frac{2}{5}x + 2$
- x'in katsayısı eğimdir: $m = -\frac{2}{5}$. Eğim negatif: doğru azalandır.

8 Doğruyu Çizme

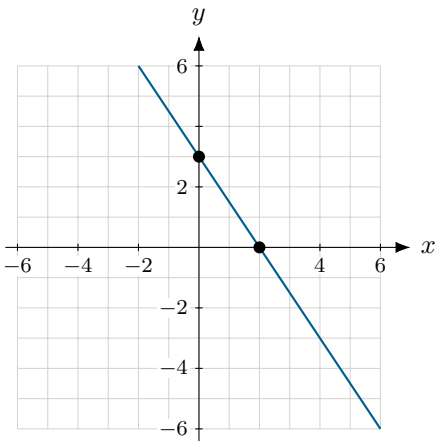
Temel Matematik, s.85-86

Bir doğruyu çizmek için iki noktası yeter. Eksenleri kestiği noktalar şöyle bulunur:

- $x = 0$ yazılır: y eksenini kestiği nokta bulunur.
- $y = 0$ yazılır: x eksenini kestiği nokta bulunur.
- İki nokta işaretlenir ve birleştirilir.

Örnek: $3x + 2y - 6 = 0$ doğrusunun eksenleri kestiği noktaları bulup çiziniz. (s.85)

- $x = 0$ için: $2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$, nokta $(0, 3)$
- $y = 0$ için: $3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$, nokta $(2, 0)$
- İki nokta işaretlenir, doğru çizilir.



9 Orijinden Geçen Doğru

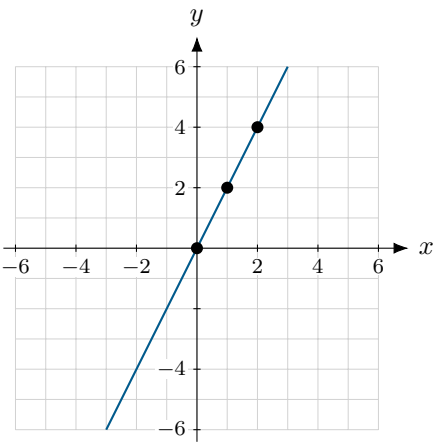
$f(x) = ax$ biçimindeki doğrularda sabit terim 0'dır. Bu doğrular **orijinden**, yani $(0, 0)$ noktasından geçer.

- İki eksen kesişimi de $(0, 0)$ noktasıdır; tek nokta doğruyu belirlemez.
- Geçen hafta ikinci nokta için x yerine 1 yazılıyordu.
- Eğimle: orijinden başlanır. $m = \Delta y / \Delta x$ ise Δx kadar sağa, Δy kadar yukarı gidilir.
- Eğim negatifse eksi işareti paya yazılır: $-\dfrac{2}{3} = \dfrac{-2}{3}$. Bu, 3 birim sağa, 2 birim aşağı gitmek demektir.

Kitapta bu doğrular Şekil 4.4'te (s.82) çizili; çizim yöntemi ayrıca anlatılmıyor.

Örnek: $y = 2x$ doğrusunu çiziniz.

- Sabit terim 0: doğru $(0, 0)$'dan geçer.
- Eğim $2 = \dfrac{2}{1}$: 1 sağa, 2 yukarı; nokta $(1, 2)$.
- Kontrol: $x = 2$ için $y = 4$.



Örnek: x iki katına çıkınca y de iki katına çıkar mı? $y = 2x$ ve $y = 2x + 1$ doğrularında bakalım.

- $y = 2x$: $x = 1$ için $y = 2$, $x = 2$ için $y = 4$. x iki katına çıkınca y de iki katına çıkar.
- $y = 2x + 1$: $x = 1$ için $y = 3$, $x = 2$ için $y = 5$. İki katı olsaydı 6 olurdu; sabit terim her seferinde bir kez eklendiği için y iki katına çıkmaz.

Sabit terim 0 ise x iki katına çıkınca y de iki katına çıkar; sabit terim 0 değilse çıkmaz.

10 Alıştırmalar

Aşağıda slaytlardaki yedi alıştırma, slayttaki sırayla yer alıyor.

Alıştırma — Doğrunun Eğimi

$A(-1, 2)$ ve $B(3, k)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $\dfrac{3}{2}$ ise k kaçtır?

- $m = \dfrac{k-2}{3-(-1)} = \dfrac{k-2}{4}$
- $\dfrac{k-2}{4} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow k - 2 = 4 \cdot \dfrac{3}{2} = 6$
- $k = 8$. Kontrol: $\dfrac{8-2}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

Alıştırma — Eğimin İşareti

$(a, 1)$ ve $(3, 7)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi tanımsızsa a kaçtır?

- Eğim tanımsız: $\Delta x = 0$, doğru düşeydir.
- $\Delta x = 3 - a = 0 \Rightarrow a = 3$
- Doğru: $x = 3$

Alıştırma — Değişim Oranı

$f(x) = ax + 5$ fonksiyonunda x, 1'den 3'e arttığında $f(x)$ 6 azalıyor. a kaçtır?

- $f(3) - f(1) = (3a + 5) - (a + 5) = 2a$
- $f(x)$ 6 azalıyor: $2a = -6$
- $a = -3$
- Eğim: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-6}{2} = -3$; doğru azalandır.

Alıştırma — Eksen Kesişimlerinden Denklem

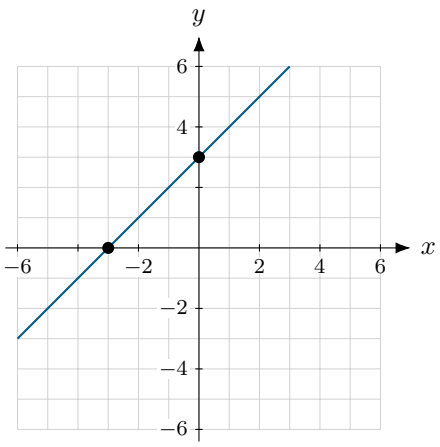
Bir doğru x eksenini 4'te, y eksenini 2'de kesiyor. Denklemini yazınız.

- Noktalar: $(4, 0)$ ve $(0, 2)$
- $m = \dfrac{2 - 0}{0 - 4} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$
- $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 0)$
- $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

Alıştırma — Doğru Çizme

$y = x + c$ doğrusu x eksenini -3'te kesiyor. c kaçtır? Doğruyu çiziniz.

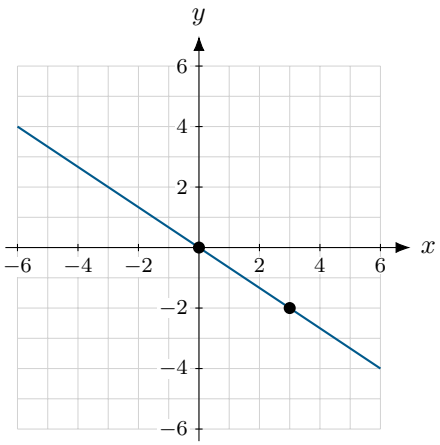
- $(-3, 0)$ doğrunun üzerinde: $0 = -3 + c \Rightarrow c = 3$
- Doğru $y = x + 3$; y eksenini $(0, 3)$'te keser.
- $(-3, 0)$ ve $(0, 3)$ noktaları işaretlenir, doğru çizilir.



Alıştırma — Orijinden Geçen Doğru

$y = -\frac{2}{3}x$ doğrusunu çiziniz.

- Sabit terim 0: doğru $(0, 0)$'dan geçer.
- Eğim $-\frac{2}{3}$: 3 sağa, 2 aşağı; nokta $(3, -2)$.
- Kontrol: $x = 3$ için $y = -\frac{2}{3} \cdot 3 = -2$
- x yerine 1 yazılsaydı $y = -\frac{2}{3}$ çıkardı; eğimle tam sayılı bir nokta bulunur.

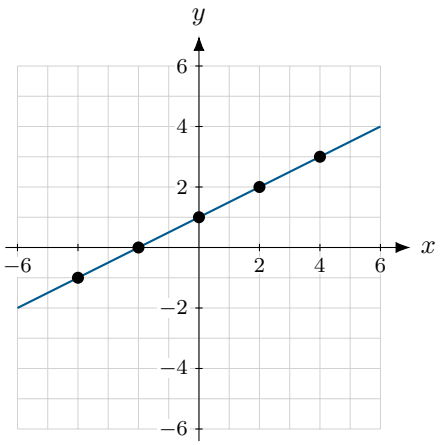


Alıştırma — Değer Tablosuyla Çizim

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ fonksiyonu için tabloyu doldurup doğruyu çiziniz. x değerlerini, y tam sayı çıkacak biçimde kendiniz seçiniz.

x	-4	-2	0	2	4
y	-1	0	1	2	3

- x çift sayı seçilince $\frac{1}{2}x$ tam sayı olur.
- Örneğin $f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 1 = -2 + 1 = -1$
- Başka çift sayılar da seçilebilir; doğru aynıdır.



Çalışma soruları, ders malzemelerinin paylaşıldığı adreste yayınlanır:
https://eozyerden.github.io/4170109-matematik/

Metin içinde (s.82) gibi işaretlenmiş örnek ve sorular şu kaynaktan alınmış veya uyarlanmıştır: Eroğlu, E. Temel Matematik. İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi.