3. Hafta — Fonksiyon Kavramı ve Doğrusal Fonksiyonlar

4170109 Matematik

1 Fonksiyon Kavramı

Temel Matematik, s.60-61

A ve B boş olmayan iki küme olsun. A'nın her elemanını B'nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen bağıntıya **fonksiyon** denir. $f : A \to B$ diye yazılır; $y = f(x)$ ile gösterilir.

- A kümesi **tanım kümesi**dir.
- B kümesi **değer kümesi**dir.
- A'nın B'de eşlendiği elemanların kümesine **görüntü kümesi** denir; $f(A)$ ile gösterilir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $f : A \to B$ ve $f(x) = y = 2x + 1$ ise $f(A)$ görüntü kümesi nedir? (s.61)

- $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
- $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
- $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
- $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

Sonuç: $f(A) = \{3, 5, 7, 9\}$. Kitapta bu örnekte görüntü kümesi $f(B)$ diye yazılmış; doğrusu $f(A)$.

Örnek (Çalışma Sorusu 1a): $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $f(x) = 3x+1$ ise $f(A)$ görüntü kümesini bulunuz.

- $f(-1) = 3 \cdot (-1) + 1 = -2$
- $f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1$
- $f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$
- $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$

Sonuç: $f(A) = \{-2, 1, 4, 7\}$.

2 Formülle Verilen Fonksiyonun Tanım Kümesi

- Fonksiyon $f : A \to B$ diye verilirse tanım kümesi A'dır.
- Yalnızca formül verilirse tanım kümesi, formülün hesaplanabildiği bütün reel sayılardır. Burada x'in alabileceği değerleri arıyoruz.

Bazı kaynaklarda bu kümeye "en geniş tanım kümesi" denir.

Tanım kümesi iki kuralla bulunur:

- Payda sıfır olamaz: paydayı sıfır yapan x değerleri tanım kümesi dışında kalır.
- Çift dereceli kökün ($\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$) içi negatif olamaz: kök içindeki ifade sıfırdan büyük veya eşit olmalıdır.

Örnek: $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Payda sıfır olamaz: $x - 2 \neq 0$, $x \neq 2$, yani tanım kümesi $\mathbb{R} - \{2\}$.

Örnek: $f(x) = \sqrt{x-5}$. Kök içi negatif olamaz: $x - 5 \geq 0$, $x \geq 5$, yani tanım kümesi $[5, \infty)$.

Not: kitabınızda tanım kümesi bazı sorularda yalnızca koşul biçiminde yazılmış; örneğin "$x > -7$" (s.128). Bu derste koşuldan sonra tanım kümesi küme ya da aralık gösterimiyle de yazılır; tek başına koşul yeterli kabul edilmez.

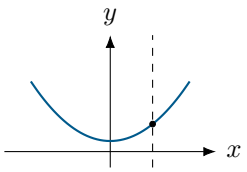
Örnek (Çalışma Sorusu 3a): $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. Payda sıfır olamaz: $x + 4 \neq 0$, $x \neq -4$, yani tanım kümesi $\mathbb{R} - \{-4\}$.

3 Fonksiyon mu, Değil mi?

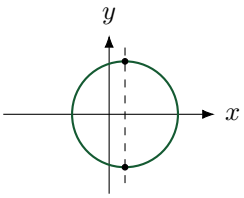
Temel Matematik, s.63

Bir grafiğin fonksiyon olup olmadığı **düşey doğru testi**yle anlaşılır.

- Grafiğe dikey bir doğru çizilir.
- Bu doğru grafiği birden fazla noktada kesiyorsa, aynı x için birden fazla y değeri var demektir ve grafik fonksiyon değildir.



fonksiyon: testi geçer



fonksiyon değil: testi geçemez

4 Fonksiyon Türleri

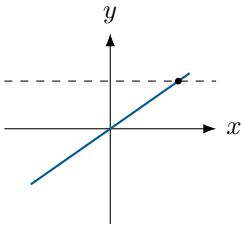
Temel Matematik, s.61-64

Fonksiyonlar, eşleme biçimlerine göre türlere ayrılır.

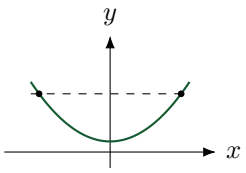
- **İçine fonksiyon**: B'de eşlenmeyen (boşta) eleman kalıyorsa f içine fonksiyondur.
- **Örten fonksiyon**: B'de boşta eleman kalmıyorsa f örten fonksiyondur.
- **Bire-bir fonksiyon**: A'nın farklı elemanlarının görüntüleri her zaman farklıysa f bire-bir fonksiyondur. Testi, grafiğe yatay bir doğru çizmektir; bu doğru grafiği birden fazla noktada kesiyorsa fonksiyon bire-bir değildir.
- **Birim fonksiyon**: $f : A \to A$, $f(x) = x$. Her eleman kendisine eşlenir. Birim fonksiyon hem bire-bir hem örtendir.
- **Sabit fonksiyon**: A'nın tüm elemanları B'nin tek bir elemanına eşlenir, $f(x) = b$.

Not: kitabınızda (s.62) bire-bir testi y eksenine paralel doğrularla anlatılmış. Doğrusu x eksenine paralel, yani yatay doğrulardır.

Düşey doğru testinde gördüğümüz parabol bir fonksiyondur ama bire-bir değildir; yatay bir doğru onu iki noktada keser.



bire-bir: testi geçer



bire-bir değil: testi geçemez

Örnek: $f(x) = 5$ ise $f(-3)$, $f(0)$ ve $f(2)$ değerleri nedir?

- $f(-3) = 5$, $f(0) = 5$, $f(2) = 5$.
- Üçü de eşittir; sabit fonksiyon tanımına uygundur.

Örnek (Çalışma Sorusu 5): $f(x) = -2x + 5$ fonksiyonu bire-bir midir? Gösteriniz.

- Grafiği eğik bir doğrudur ($a = -2 \neq 0$).
- Her yatay doğru bu doğruyu bir kez keser. Yatay doğru testine göre fonksiyon bire-birdir.
- Aynı sonuca cebirle de varılır: $f(a) = f(b) \Rightarrow -2a + 5 = -2b + 5 \Rightarrow -2a = -2b \Rightarrow a = b$.

5 Fonksiyon İşlemleri

Temel Matematik, s.64-65

İki fonksiyon üzerinde dört işlem tanımlıdır:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$

Bir fonksiyon bir sayıyla da çarpılabilir veya toplanabilir: $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$ ve $(f + c)(x) = f(x) + c$ $(k, c \in \mathbb{R})$.

Örnek: $f(x) = 2 - x$, $g(x) = 3 + 3x$ ise $(f + g)(x)$ nedir? (s.65)

- $(f + g)(x) = (2 - x) + (3 + 3x)$
- $(f + g)(x) = 2x + 5$

Örnek: $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 3x + 2$ ise $(f \cdot g)(2) + (2f + 3)(-2)$ kaçtır? (s.65)

- $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $g(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$, $(f \cdot g)(2) = 3 \cdot 8 = 24$
- $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 1 = -5$
- $(2f + 3)(-2) = 2 \cdot f(-2) + 3 = 2 \cdot (-5) + 3 = -7$
- Toplam: $24 + (-7) = 17$

Örnek (Çalışma Sorusu 7): $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ ise $(f \cdot g)(1) + (3f + 2)(-1)$ değerini bulunuz.

- $f(1) = 1 + 3 = 4$, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $(f \cdot g)(1) = 4 \cdot 1 = 4$
- $f(-1) = -1 + 3 = 2$
- $(3f + 2)(-1) = 3 \cdot f(-1) + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

Sonuç: $4 + 8 = 12$.

6 Doğrusal Fonksiyon

Temel Matematik, s.79-80

$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$) biçimindeki fonksiyona **doğrusal fonksiyon** denir.

- Grafiği eğik bir doğrudur.
- Tanım kümesi ve değer kümesi $\mathbb{R}$'dir.
- $a = 0$ olursa $f(x) = b$ olur. Kitabınızda buna doğrusal fonksiyon denmez, sabit fonksiyon denir; grafiği yatay doğrudur.

Arz, talep ve maliyet fonksiyonları basit durumlarda doğrusal olarak modellenir.

Doğruyu çizmek için eksenleri kestiği iki nokta bulunur:

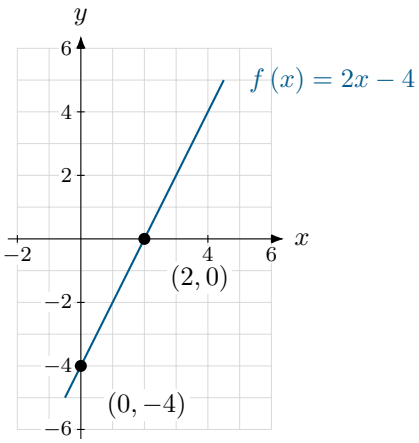
- y eksenini kestiği nokta: x yerine 0 yazılır, $f(0) = b$, nokta $(0, b)$.
- x eksenini kestiği nokta: $f(x)$ yerine 0 yazılır, $ax + b = 0$, $x = -b/a$, nokta $(-b/a, 0)$.

İki nokta bir doğruyu belirler. Bu iki noktayı işaretleyip birleştirmek yeterlidir. x eksenini kestiği nokta, $ax + b = 0$ denkleminin köküdür.

Not: $b = 0$ ise iki nokta da $(0, 0)$ olur. İkinci nokta için $x = 1$ konur; örneğin $f(x) = x$ için $(1, 1)$.

Örnek: $f(x) = 2x - 4$ doğrusunun eksenleri kestiği noktaları bulunuz ve doğruyu çiziniz.

- y eksenini kestiği nokta: $f(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$, nokta $(0, -4)$.
- x eksenini kestiği nokta: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$, nokta $(2, 0)$.
- İki nokta işaretlenir ve doğru bu iki noktadan geçecek biçimde çizilir.



Örnek (Çalışma Sorusu 9a): $f(x) = 4x - 8$ doğrusunun eksenleri kestiği noktaları bulunuz. y ekseni: $f(0) = -8$, nokta $(0, -8)$. x ekseni: $4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$, nokta $(2, 0)$.

Örnek (Çalışma Sorusu 12): $f(x) = 2x - 6$ doğrusunun eksenleri kestiği noktaları bulunuz. Bu fonksiyon bire-bir midir?

- y ekseni: $f(0) = -6$, nokta $(0, -6)$.
- x ekseni: $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, nokta $(3, 0)$.
- Grafiği eğik bir doğrudur ($a = 2 \neq 0$). Her yatay doğru bu doğruyu bir kez keser; fonksiyon bire-birdir.
- Aynı sonuca cebirle de varılır: $f(a) = f(b) \Rightarrow 2a - 6 = 2b - 6 \Rightarrow a = b$.

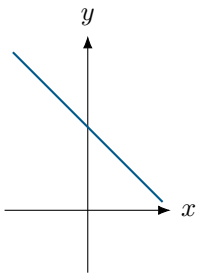
Örnek (Çalışma Sorusu 13): $f(x) = x + 5$, $g(x) = 2x - 1$ ise $(f + g)(x)$ fonksiyonunu bulunuz ve bulduğunuz fonksiyonun x eksenini kestiği noktayı hesaplayınız. $(f+g)(x) = (x+5) + (2x-1) = 3x + 4$. x ekseni kesişimi: $3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$, nokta $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$.

7 Düzlemde Doğrular

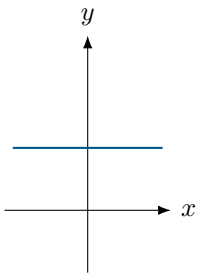
Temel Matematik, s.80

Bir doğrunun türü, konumuna göre şöyle ayırt edilir.

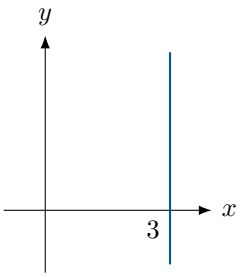
- Her eğik doğru bir doğrusal fonksiyonun grafiğidir, $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Birim fonksiyon $f(x) = x$ de böyledir ($a = 1$, $b = 0$).
- Her yatay doğru bir sabit fonksiyonun grafiğidir, $y = b$.
- Düşey doğrular ($x = c$) fonksiyon tanımına uymaz, çünkü tek bir x değeri için sonsuz sayıda y değeri vardır (düşey doğru testi).



Eğik doğru: doğrusal fonksiyon



Yatay doğru: sabit fonksiyon



Düşey doğru $x = 3$: fonksiyon değil

8 Alıştırmalar

Aşağıda önce derste çözdüğümüz dört alıştırma, slayttaki sırayla yer alıyor. Sonda dört alıştırma daha var.

Alıştırma — Tanım Kümesi

$f(x) = \sqrt{8 - 2x}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. (s.71)

- Kök içi negatif olamaz: $8 - 2x \geq 0$.
- $-2x \geq -8$; iki taraf -2'ye bölününce yön değişir.
- $x \leq 4$, yani tanım kümesi $(-\infty,\ 4]$.

Alıştırma — Fonksiyon Değeri

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ ise $f(0) + f(1)$ değerini bulunuz. (s.71)

- $f(0) = \dfrac{0}{0^2 + 2} = \dfrac{0}{2} = 0$
- $f(1) = \dfrac{1}{1^2 + 2} = \dfrac{1}{3}$
- $f(0) + f(1) = 0 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

Alıştırma — Fonksiyon İşlemleri

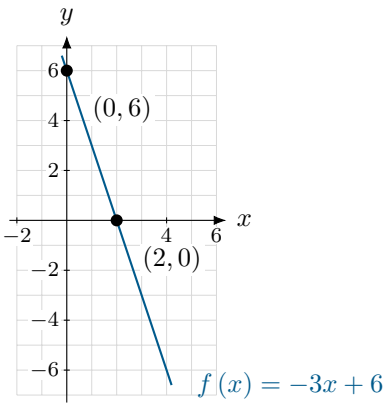
$f(x) = 2x + 3$ ve $g(x) = x - 4$ ise $(f \cdot g)(1)$ nedir?

- $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$
- $g(1) = 1 - 4 = -3$
- $(f \cdot g)(1) = f(1) \cdot g(1) = 5 \cdot (-3) = -15$

Alıştırma — Doğrusal Fonksiyon

$f(x) = -3x + 6$ doğrusunun eksenleri kestiği noktaları bulunuz ve doğruyu çiziniz.

- y ekseni: $f(0) = -3 \cdot 0 + 6 = 6$, nokta $(0, 6)$.
- x ekseni: $-3x + 6 = 0 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = 2$, nokta $(2, 0)$.
- İki nokta işaretlenir ve doğru bu iki noktadan geçecek biçimde çizilir.



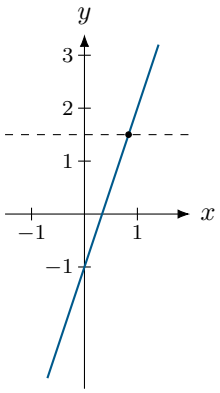
Ek Alıştırmalar

Örnek: $f(x) = -2$ fonksiyonu sabit fonksiyon mudur? $f(7)$ nedir?

- Evet; her x için değer -2'dir.
- $f(7) = -2$.

Örnek: $f(x) = 3x - 1$ fonksiyonu bire-bir midir? (s.68)

- Grafiği eğik bir doğrudur ($a = 3 \neq 0$).
- Her yatay doğru bu doğruyu yalnızca bir noktada keser. Yatay doğru testine göre fonksiyon bire-birdir.
- Aynı sonuca cebirle de varılır: $f(a) = f(b) \Rightarrow 3a - 1 = 3b - 1 \Rightarrow a = b$.



$f(x) = 3x - 1$: yatay doğru grafiği bir kez keser

Örnek: $f(x) = 3x + 1$ ve $g(x) = x^2 - 2$ ise $(f + g)(x)$ nedir? $(f + g)(x) = (3x + 1) + (x^2 - 2) = x^2 + 3x - 1$.

Örnek: $x = 3$ doğrusu hangi eksene paraleldir? Bir fonksiyonun grafiği olabilir mi? (s.93)

- y eksenine paraleldir; düşey bir doğrudur.
- Bir fonksiyonun grafiği olamaz: $x = 3$ için sonsuz sayıda y değeri vardır (düşey doğru testi). Grafiği Düzlemde Doğrular bölümündeki üçüncü çizimdir.

Çalışma soruları, ders malzemelerinin paylaşıldığı adreste yayınlanır:
https://eozyerden.github.io/4170109-matematik/

Metin içinde (s.61) gibi işaretlenmiş örnek ve sorular şu kaynaktan alınmış veya uyarlanmıştır: Eroğlu, E. Temel Matematik. İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi.